سلسلۂ نصابیات جامعۂ عثمانیہ

صغاری احصاء

جلد سوم

تصنیف

ہوریس لیمب ایم۔اے ایل ایل ڈی ایس سی ڈی ایف آر ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔اے و کشن چند ایم۔اے

پروفیسران کلیہ جامعہ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۸ھ م سنہ ۱۳۳۹ف م سنہ ۱۹۳۰ع

دارالطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

۷۸۶

دیباچہ (از مصنف)

اس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصا کے ان حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں اسوقت اسکی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔

اس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کیگئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کیگئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} = \text{عا}$$

کا معیاری حل ہے۔ اس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانیکا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جا سکتا لیکن

کہنا بیجا ہوگا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصا کے تعلق سے بہ نظر کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔

لا متناہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور تکمل سے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پچھلی اشاعتوں میں ان سوالوں پر یکساں استمرار کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی، احصا کی کتاب میں اس وقت اس نظریہ کا داخل کر لینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اس کو ترک کر دیا گیا ہے۔ اس کی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کر جائے۔

کمیت کے مرکزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قسم کی دیگر چیزوں میں اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کر دیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کر دیا گیا ہے فقط

جون ۱۹۱۹ء

ہوریس لیمب

فہرست مضامین

دفعہ	مضمون	صفحہ
	گیارہواں باب **پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں**	
۱۵۱	تفرقی مساواتوں کی تکوین۔	۵۲۱
۱۵۲	پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں	۵۲۴
۱۵۳	حل کرنے کے طریقے۔ ایک متغیر غائب۔	۵۲۶
۱۵۴	متغیر جدائی پذیر۔	۵۲۷
۱۵۵	ٹھیک مساواتیں۔	۵۳۰
۱۵۶	متجانس مساواتیں	۵۳۳
۱۵۷	مستقل سروں والی پہلے رتبہ کی خطی مساوات	۵۳۵
۱۵۸	پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات	۵۳۹

بارھواں باب

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

تیرھواں باب

مستقل سروالی خطی مساواتیں

چودھواں باب

قوی سلسلوں کا تفرق اور تکمل

پندرھواں باب

ٹیلر کا مسئلہ

سولھواں باب

متعدد متبوع متغیروں کے تفاعلات

حصۂ سوم

گیارھواں باب

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۱۵۱ — تفرقی مساواتوں کی تکوین —

متبوع متغیر لا، تابع متغیر ما اور ایک یا زیادہ مشتق تفاعلوں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{2}}$، $\frac{\text{فر}^{3}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{3}}$ . . . . میں کوئی رشتہ تفرقی مساوات کہلاتا ہے*۔

مساوات کا "رتبہ" اس کے اعلیٰ ترین تفرقی سر سے مقرر کیا جاتا ہے۔

پس لا، ما اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ میں کوئی رشتہ، پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہوگی۔ حل دریافت کرنیکے طریقوں پر غور کرنے سے پہلے مساوات کے پیدا ہونے کے کم از کم ایک طریقہ پر بحث کرنا مفید ہوگا۔

اگر متغیروں لا، ما اور ایک اختیاری مستقل ج میں رشتہ دیا ہوا ہے تو اس کو تفرق کرنے سے لا، ما، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور ج میں ایک اور مساوات

[* "جزوی" تفرقی مساوات سے تمیز کرنیکے لئے عموماً اسے "معمولی" تفرقی مساوات کہا جاتا ہے۔ جزوی تفرقی مساوات میں دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل کے جزوی مشتق شریک ہوتے ہیں

حاصل ہو جائے گی ۔ ان دونوں مساواتوں میں ج کو ساقط کرنے سے پہلے
رتبہ کی تفرقی مساوات حاصل ہو گی ۔ زیادہ عام صورت میں اگر متغیروں
(لا، ما) اور ن اختیاری مستقلات ج۱، ج۲ ...... جن میں رشتہ
دیا ہوا ہو تو بلحاظ لا کے اس کو ن مرتبہ سلسلہ وار تفرق کرنے سے کل
(ن + ۱) مساواتیں حاصل ہونگی جن میں سے ن اختیاری مستقل ساقط
کئے جا سکتے ہیں ۔ حاصل اسقاط ن ویں رتبہ کی تفرقی مساوات ہو گی ۔
اس نقطہ نظر سے پہلے رشتہ کو ہم "ابتدائی عمل" یا محض "ابتدائی" کہینگے ۔

مثال (۱) ۔ اگر ابتدائی ما = م لا + ج .... (۱)
ہو تو تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

۳۸ مثال (۲) ۔ ابتدائی ما² = ۴ ا لا + ج .... (۳) سے
مساوات ما $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۲ ا .... (۴) حاصل ہوتی ہے ۔

مثال (۳) اگر ابتدائی لا جم عہ + ما جب عہ = ر ... (۵)
ہو جہاں ر، عہ اختیاری مستقل ہے تو مساوات

جم عہ + $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ جب عہ = ۰ حاصل ہوتی ہے ۔

ان سے (ما - لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$) جب عہ = ر ، (ما - لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$) جم عہ = - ر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$
حاصل ہوتے ہیں ۔ اور انکا مربع لیکر جمع کرنے سے مساوات

(ما - لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$)² = ر² { ۱ + ($\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$)² } .... (۶) حاصل ہوتی ہے

مثال (۴) اگر ابتدائی ما = ا لا + ب .... (۷) میں سے
مستقلات ا اور ب ساقط کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = ۰ \quad \text{.............(۸)}$$

مثال ۵ ـ ابتدائی $(لا - عہ)^2 + (ما - بہ)^2 = ا^2$ ...(۹)
میں سے عہ اور بہ ساقط کرنے سے مساوات

$$ا^2 \left(\frac{فر^2 ما}{فر لا^2}\right)^2 = \left\{1 + \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2\right\}^3 \quad \text{.......(۱۰)}$$

حاصل ہوتی ہے ـ عمل کی تفصیل دفعہ ۱۸۹ میں دی گئی ہے ـ

اوپر کے اعمال کی ہندسی تعبیر ہو سکتی ہے ـ ابتدائی میں اختیاری مستقلوں کے بدلنے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں وہ منحنیوں کے کسی قبیل یا نظام کو ظاہر کرتی ہیں ـ تفرقی مساوات (جس میں یہ مستقلات نہیں شریک ہوتے) ان تمام منحنیوں کی کسی خاص مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے ـ مثلاً مثال (۲) میں ابتدائی، مساوی مکافیوں کے ایسے قبیل کو ظاہر کرتا ہے جنکے محور، لا محور پر منطبق ہوتے ہیں لیکن انکے راس مختلف نقطوں پر ہیں ـ تفرقی مساوات (۴) ان تمام منحنیوں کی ایک مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے اور وہ مشترک خاصیت یہ ہے کہ زیر عماد دے ہوئے مستقل ۲ ا کے مساوی ہے ـ

نیز مثال (۵) کے ابتدائی میں اگر عہ اور بہ کو بدلا جائے تو دئے ہوئے نصف قطر ا کے دائروں کا ایک دوہرا لا انتہا ہی نظام حاصل ہوتا ہے ان دائروں کے مرکز مستوی لا ما میں کہیں بھی ہو سکتے ہیں ـ تفرقی مساوات اس خاصیت کو ظاہر کرتی ہے کہ نصف قطر انحنا ہر جگہ مستقل ا کے مساوی ہے ـ دفعہ ۱۳۵ دیکھو ـ

حرکیات سے اور مثالیں دیجا سکتی ہیں ـ

مثال ۶ ـ اگر ابتدائی $لا = \frac{1}{2} ج ت^2 + ا ت + ب$ ...(۱۱)
میں ا اور ب کو بدلا جائے تو خطی حرکتوں کا ایک خاص گروہ یا جماعت حاصل ہوتی ہے
تفرقی مساوات

$$\frac{فر^2 لا}{فر ت^2} = ج \quad \text{.............(۱۲)}$$

اس گروہ کی اس مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے کہ اسراع کی مستقل قیمت ج ہے۔

مثال ۷۔ نیز ابتدائی لا = الف جم ن ت + ب جب ن ت ... (۱۳)

سے مساوات $\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ن}^2 \text{لا}$ .... (۱۴)

حاصل ہوتی ہے۔ یہ تفرقی مساوات اس بات کو بیان کرتی ہے کہ ابتدائی حل سے حاصل شدہ حرکت میں اسراع، لا کے مبدا کی جانب ہے اور اسراع کو مبدأ سے فاصلہ کیساتھ مستقل نسبت ن^2 ہے۔

مذکورۂ بالا مثالوں سے یہ بالکل ظاہر ہے کہ کسی ایسے ابتدائی رشتہ سے جس میں لا، ما اور ایک یا ایک سے زیادہ اختیاری مستقل ت شامل ہوں، ابتدائی تفرقی مساوات کس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔ عملی طور پر عموماً اس سوال کا عکس درپیش ہوتا ہے یعنی متغیروں میں عام سے عام ایسا رشتہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے جو دی ہوئی تفرقی مساوات کو پورا کرے۔

مثلاً اگر ہندسہ کی یا حرکیات کی کوئی عام خاصیت ہو جس کو تفرقی مساوات کی شکل میں بیان کیا گیا ہے تو ہم منحنیوں کے اس پورے قبیل کو یا حرکتوں کے اس گروہ کو دریافت کرنا چاہتے ہیں جو یہ خاصیت رکھتے ہوں۔

دی ہوئی تفرقی مساوات سے، متغیروں میں عام رشتہ دریافت کرنیکے عمل کو مساوات کا "حل کرنا" یا "تکمل کرنا" کہتے ہیں، اس عام رشتہ میں مستقلوں کی مناسب تعداد کا موجود ہونا ضروری ہے، اس "نتیجہ کو ہم" عام حل" یا کامل ابتدائی کہینگے متغیروں میں کوئی خاص رشتہ جو مساوات کو پورا کرے "خاص حل" کہلاتا ہے۔

۵۴ ۱ — پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

پہلے رتبہ کی عام تفرقی مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\text{فہ}\left(\text{لا}، \text{ما}، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = ... (۱)$$

اس مساوات میں یہ مضمر ہے کہ ما متغیر لا کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $\frac{فرما}{فرلا}$ مسلسل ہے۔

ایک اختیاری مستقل والے ابتدائی سے پہلے رتبہ کی، تفرقی مساوات کے بنانیکے طریقے سے (جو دفعہ ۱۵۱ میں بتایا گیا ہے) یہ خیال پیدا ہوتا ہے کہ مساوات (۱) کا عام حل ہر صورت میں لا، ما اور ایک اختیاری مستقل پر مشتمل ہوگا۔ اور دراصل یہ بات صحیح ہے۔ مگر بعض صورتوں میں مساوات کا نادر حل (دفعہ ۱۶۱) ہوتا ہے جس میں اختیاری مستقل نہیں ہوگا۔ اس امر کا باقاعدہ ثبوت مشکل ہے۔ اور اسکو یہاں نظرانداز کرنا بیجا نہوگا کیونکہ اُن تمام صورتوں میں جنکے تکمل کے عملی طریقے دریافت ہوچکے ہیں ان کے عمل سے ظاہر ہوجاتا ہے کہ حل مذکورۂ بالا نوعیت کا ہے۔

عام سوالات میں مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن $\frac{فرما}{فرلا}$ کا منطق صحیح جبریہ تفاعل ہوگا یا اسی شکل میں لایا جاسکیگا۔ مساوات کا "درجہ" اس میں $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بڑی سے بڑی قوت سے مقرر کیا جاتا ہے۔

پہلے درجہ کی عام مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$م + ن \frac{فرما}{فرلا} = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

یا

$$م\, فرلا + ن\, فرما = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$$

جس میں م اور ن متغیروں لا، ما کے دئے ہوئے تفاعل ہیں نیز شکل (۲) اس کے معادل ہے

$$\frac{فرما}{فرلا} = - \frac{م}{ن} = فہ (لا، ما) \quad \ldots\ldots (۴)$$

اگر لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے فہ (لا، ما) حقیقی اور وحید القیمت ہے تو مستوی لا ما کے ہر ایک نقطہ کے جواب میں مساوات (۴) سے

ایک خاص سمت حاصل ہوگی۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ ایک نقطہ، مستوی کے کسی مقام سے شروع ہوکر ہمیشہ اس طور پر حاصل شدہ سمت میں حرکت کرتا جائے تو یہ ایک منحنی مرتسم کریگا جو دی ہوئی تفرقی مساوات کا ایک خاص حل ہوگا۔ ایسے منحنیوں کے مجموعہ سے ایک واحد لاتناہی نظام حاصل ہوگا۔ اس نظام کے ہر منحنی کا تعین اس نقطہ سے ہوسکیگا جہاں پر یہ منحنی ایک اختیاری خط مستقیم کو قطع کرتا ہے۔ نیز اس سے ظاہر ہے کہ موجودہ صورت میں نظام کے کوئی دو منحنی ایک دوسرے کو قطع نہیں کرینگے۔

پس ہمیں اس امر کا کچھ ذہنی ثبوت حاصل ہوگیا کہ مساوات (۴) کے حل میں صرف ایک اختیاری مستقل ہوگا*۔

اب ہم مختلف صورتوں میں مساوات (۴) کے حل کے معلومہ طریقوں پر غور کرینگے۔

۱۵۳ـ حل کرنے کے طریقے ـ ایک متغیر غائب ـ

(آ) شکل $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{لا})$ ....(۱)

جس میں ما تصریحی طور پر موجود نہیں ہے صرف سادہ تکمل سے حل ہوسکتا ہے۔ مثلاً

$$\text{ما} = \int \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا} + \text{ج} \quad ....(۲)$$

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

(ب) مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{ما})$ ....(۳)

جس میں لا تصریحی طور پر موجود نہیں ہے ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$\frac{\text{فرما}}{\text{ف}(\text{ما})} = \text{فرلا}$$

*اس کا باقاعدہ ثبوت کوشی نے دیا ہے۔

جس سے $\int \frac{\text{فرما}}{\text{ف(ما)}} = \text{لا} + \text{ج}$ .... (۴)

مثال :- وہ منحنی دریافت کرو جس میں زیر مماس مستقل ا ہے۔

اب دفعہ ۶۰ سے $\text{ما} \div \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ا}$

یا $\frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}}$ .... (۵)

اس لئے $\text{لوک ما} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{ج}$

یا $\text{ما} = \text{ب}\ \text{ھو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}$ .... (۶)

جہاں $\text{ب} = \text{ھو}^{\text{ج}}$ اختیاری مستقل ہے۔

۱۵۴ - متغیر جدائی پذیر -

اس کی عام شکل ہے $\text{فا(لا)} + \text{ف(ما)} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ .... (۱)

یا $\text{فا(لا) فرلا} + \text{ف(ما) فرما} = ۰$ .... (۲)

۳۸۶

اگر مساوات اس شکل میں لائی جا سکتی ہے تو کہتے ہیں کہ متغیر جدائی پذیر ہیں
ظاہر ہے کہ اس کا حل ہے

$\int \text{فا(لا) فرلا} + \int \text{ف(ما) فرما} = \text{ج}$ .... (۳)

مثال ۱ - وہ منحنی دریافت کرو جنکے تمام عماد ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

اگر اس نقطہ کو قائم محوروں کا مبدا مان لیں تو دی ہوئی شرط سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$

یا لا فر لا + ما فر ما = ۰ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۴)

اِس لئے لا۲ + ما۲ = ج ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۵)

پس مطلوبہ منحنی ایسے دائرے ہیں جنکا مرکز مبدا ہے ۔

مثال ۲ ۔ ایسا منحنی دریافت کرو کہ کسی بیرونی نقطہ سے اِس کے تمام مماس مساوی ہوں ۔

اگر اس کے ایک ثابت مماس کو ابتدائی خط فرض کریں اور نقطۂ تماس کو مبداء تو ابتدائی خط کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے دونوں مماس کے مساوی ہونے کی شرط دفعہ ۶۳ کی ترقیم کے مطابق فما = طہ ہے

اور اس لئے $\frac{ر فرطہ}{فرر}$ = مس طہ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۶)

پس $\frac{فرر}{ر}$ = مم طہ فرطہ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۷)

اور لوک ر = لوک جب طہ + ج

یا ر = ا جب طہ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۸)

جہاں ا اختیاری مستقل ہے ۔

اُس لئے صرف دائرہ ہی ایسا منحنی ہے جو دی ہوئی شرط کو پورا کرتا ہے ۔

مثال ۳ ۔ ایک ذرہ ایسی قوت کشش کے زیر عمل جو ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے خط مستقیم میں حرکت کر رہا ہے ۔ اس کی حرکت کی

مساوات یہ ہے

$$\text{ع}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{مما}}{\text{لا}^{۲}} \quad \dots\dots\dots\dots (۹)$$

بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲}\text{ع}^{۲} = \frac{\text{مما}}{\text{لا}} + \text{م} \quad \dots\dots\dots (۱۰) \quad \text{م (مستقل)}$$

اگر لا = ∞ کے لئے ع صفر ہو تو م = ۰.

ایسی صورت میں قوت کے مرکز سے فاصلہ ر پر ذرہ کی رفتار $\sqrt{\frac{\text{۲مما}}{\text{ر}}}$

یا $\sqrt{\text{۲ج ر}}$ ہوگی اگر $\text{ج} = \frac{\text{مما}}{\text{ر}^{۲}}$

۸۷ پس حالت سکون سے، بہت بڑے فاصلہ سے گرنے والا ذرہ جسکے خلاف کوئی مزاحمت عمل نہ کرے اس رفتار سے سطح زمین پر پہنچیگا جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے اور ج سطح پر اسراع بجاذبہ ارض ہے۔

مثال ۴ ۔ یکساں افقی بوجھ والے معلق پل میں زنجیر کی شکل اس شرط سے حاصل ہوتی ہے کہ منحنی کے کوئی دو مماس وتر تماس کی تنصیف کرنے والے انتصابی پر قطع کرتے ہیں۔

اگر زیرترین نقطہ قائم محوروں کا مبدأ لیا جائے اور اس نقطہ کا مماس لا محور ہو تو منحنی کے کسی نقطہ کا زیر مماس نصف فصلہ کے مساوی ہوگا۔

$$\text{پس} \quad \text{ما} \div \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۲}\text{لا}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = ۲\,\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} \quad \dots\dots\dots\dots (۱۱)$$

اِس کا تکمل ہے لوک ما = ۲ لوک لا + م (مستقل)

$$\text{یا} \quad \text{ما} = \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ر}} \quad \dots\dots\dots\dots (۱۲)$$

جہاں ا اختیاری ہے۔
یعنی زنجیر کی شکل قطع مکانی ہے جس کا محور انتصابی ہے۔

۱۵۵- ٹھیک مساواتیں۔

دفعہ گذشتہ دراصل ٹھیک مساوات کے عنوان کے ماتحت آتی ہے۔
مساوات م فرلا + ن فرما = ۰ .... (۱)
اس صورت میں "ٹھیک" تفرقی مساوات کہلائے گی جبکہ م اور ن
بالترتیب $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ کی شکل کے ہوں۔
مساوات $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ فرلا + $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ فرما = ۰ .... (۲)
معادل ہے فرع = ۰ .... (۳)
کے اور اسکا تکملہ ہے ع = ج .... (۴)
جہاں ج اختیاری مستقل* ہے۔
یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ (۱) کے نمونہ کی ہر مساوات یا تو ٹھیک ہے یا مناسب تکملی جزو ضربی سے ضرب دیکر "ٹھیک" بنائی جا سکتی ہے، نیز ایسے اجزائے ضربی کی تعداد غیر محدود ہے کیونکہ اگر ہم فرض کر لیں کہ مساوات (۱) شکل (۳) میں لائی جا چکی ہے تو اسے ف (ع) سے ضرب دینے پر بھی یہ ٹھیک رہے گی جہاں ف (ع)، متغیر ع کا کوئی تفاعل ہے
ف (ع) فرع = ۰ .... (۵)
کا تکملہ ہے ف (ع) = ج .... (۶)
اور یہ (۴) کے معادل ہے۔

[* اس بات کے دریافت کرنے کا قاعدہ کہ پہلے درجہ کی دی ہوئی مساوات ٹھیک ہے یا نہیں دفعہ ۱۹۳ میں دیا گیا ہے]

۸۸

مثال ۱ ـ (ا لا + ھ ما + گ) فر لا + (ھ لا + ب ما + ف) فر ما = ۰ .... (۷)

یہ معادل ہے

فر (ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما) = ۰ ..... (۸)

کے پس ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما = ج ..... (۹)

مثال ۲ ـ لا فر لا + ما فر ما = ک (لا فر ما − ما فر لا) ..... (۱۰)

یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\text{فر}(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}) = ۲\,\text{ک}\,\text{لا}^{2}\,\text{فر}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) \quad .... (۱۱)$$

اور اس لئے (لا^{2} + ما^{2}) سے تقسیم کرنے پر ٹھیک مساوات بنجاتی ہے ۔ پس

$$\frac{\text{فر}(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2})}{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}} = \frac{۲\,\text{ک}\,\text{فر}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)}{۱ + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{لا}^{2}}} \quad .... (۱۲)$$

اس لئے تکمل کرنے پر

$$\text{لوک}(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}) = ۲\,\text{ک}\,\text{مس}^{-۱}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) + \text{ج} \quad .... (۱۳)$$

مساوات (۱۰) ذیل کیطرح بھی حل کیجا سکتی ہے ۔

ابدال لا = ر جم طا اور ما = ر جب طا ...... (۱۴)

سے لا فر لا + ما فر ما = ر فر ر اور لا فر ما − ما فر لا = ر^{2} فر طا ...(۱۵)

اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}\,\text{ر}}{\text{ر}} = \text{ک}\,\text{فر}\,\text{طا} \quad .... (۱۶)$$

پس لوک ر = ک طا + ج .... (۱۷)

اور یہ صریحاً (۱۳) کے معادل ہے ۔

مثال ۳ ـ ایسے گردشی مجسم کی شکل دریافت کرو جس میں کسی عمودی تراش سے

کٹے ہوئے حجم کا اوسط مرکز سطح تقاطع سے محور کے طول کے $\frac{1}{\text{ن}}$ فاصلے پر واقع ہو۔

اگر محور تشاکل کو لا محور لیا جائے اور ما مکون منحنی کا معین ہو تو دفعہ ۱۱۶ (۱۱) کی رو سے

$$\frac{\int_0^{\text{ضا}} \text{لا}\,\text{ما}^2\,\text{فرلا}}{\int_0^{\text{ضا}} \text{ما}^2\,\text{فرلا}} = \left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\text{ضا}$$

یا

$$\int_0^{\text{ضا}} \text{لا}\,\text{ما}^2\,\text{فرلا} = \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\,\text{ضا}\int_0^{\text{ضا}} \text{ما}^2\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

جہاں ضا کاٹنے والے عمودی مستوی کا فصلہ ہے۔

پس اگر "عا" اس سطح تقاطع کا نصف قطر ہو تو دفعہ ۹۲ کے قاعدے کی رو سے بلحاظ ضا کے تفرق کرنے سے

$$\text{ضا}\,\text{عا}^2 = \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\,\text{ضا}\,\text{عا}^2 + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\int_0^{\text{ضا}} \text{ما}^2\,\text{فرلا}$$

یا

$$\text{ضا}\,\text{عا}^2 = (\text{ن}-1)\int_0^{\text{ضا}} \text{ما}^2\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۹)$$

دوبارہ تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرضا}}(\text{ضا}\,\text{عا}^2) = (\text{ن}-1)\,\text{عا}^2 \quad \ldots\ldots (۲۰)$$

جس سے

$$\frac{\text{فر}(\text{ضا}\,\text{عا}^2)}{\text{ضا}\,\text{عا}^2} = (\text{ن}-1)\frac{\text{فرضا}}{\text{ضا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۱)$$

اور تکمل کرنے سے $\text{ضا}\,\text{عا}^2 = \text{ک}\,\text{ضا}^{\text{ن}-1}$

اس لئے ابتدائی منحنی $\text{ما}^2 = \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ن}-2}$ ...... (۲۲) کے نمونے کا ہے۔

چونکہ ہم نے بلحاظ ضا کے دو مرتبہ تفرق کیا ہے، اس لئے حل کردہ تفرقی مساوات

ابتدائی سوال سے ذرا زیادہ عام ہے۔ درحقیقت اگر (۱۹) سے دونوں محدود تکملوں کے نیچے کی حدود بجائے صفر کے کچھ اور مستقل کردئے جائیں تو بھی تفرقی مساوات وہی حاصل ہوگی۔ اس لئے تجربی طور پر اس بات کی تصدیق ضروری ہے کہ آیا حاصل شدہ حل ابتدائی مساوات کو پورا کرتا ہے یا نہیں۔ یہ تصدیق ن > ۲ کے لئے آسانی سے ہوسکتی ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن = ۳ تو جسم گردشی مکافی نما ہے اور اگر ن = ۴ تو یہ مخروط ہے۔

۱۵۶۔ متجانس مساواتیں۔

فرض کرو کہ مساوات م + ن $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰ میں م اور ن متغیروں لا، ما کے ایک ہی درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔

اس صورت میں کسر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ صرف $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کا تفاعل ہے۔ اور اسلئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

اگر ما = لا و تو $\text{لا}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و} = \text{ف}(\text{و})$ ..... (۲)

اس میں متغیر لا، و جدائی پذیر ہیں اور اسلئے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرو}}{\text{ف}(\text{و}) - \text{و}} \quad \cdots\cdots\cdots (۳)$$

پس $\text{لوک لا} = \int \frac{\text{فرو}}{\text{ف}(\text{و}) - \text{و}} + \text{ج} \quad \cdots\cdots\cdots (۴)$

تکمل کے بعد اس میں و = $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ لکھنا ہوگا۔

مثال:- $(\text{لا}^2 - \text{ما}^2)\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - 2\,\text{لا}\,\text{ما} = 0$ ....(۵)

اس میں $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \dfrac{2\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}}}{1 - \dfrac{\text{ما}^2}{\text{لا}^2}}$ ....(۶)

اس لئے $\text{لا}\dfrac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و} = \dfrac{2\,\text{و}}{1 - \text{و}^2}$

یعنی $\text{لا}\dfrac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \dfrac{\text{و}(1 + \text{و}^2)}{1 - \text{و}^2}$

اس لئے $\dfrac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \dfrac{(1 - \text{و}^2)\,\text{فرو}}{\text{و}(1 + \text{و}^2)} = \left[\dfrac{1}{\text{و}} - \dfrac{2\,\text{و}}{1 + \text{و}^2}\right]\text{فرو}$ ....(۷)

تکمل کرنے سے $\text{لوگ لا} = \text{لوگ و} - \text{لوگ}(1 + \text{و}^2) + \text{مستقل}$

یہ معادل ہے $\text{لا}(1 + \text{و}^2) = \text{ج}\,\text{و}$

کے یعنی $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}\,\text{ما}$ ....(۸)

اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ متجانس تفرقی مساوات کا عام حل، متشابہ اور متشابہ طور پر رکھے ہوئے منحنیوں کے ایک قبیل کو ظاہر کرتا ہے جس میں مشابہت کا مرکز مبداء ہے کیونکہ مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ جہاں منحنیات، مبداء میں گزرنے والے کسی اختیاری خط $\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{لم}$ کو قطع کرتے ہیں وہاں $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت ہر منحنی کے لئے وہی ہے یعنے مماس متوازی ہیں۔

مثلاً مذکورہ بالا مثال میں مساوات کا حل، دائروں کے ایک قبیل کو ظاہر کرتا ہے جو لا محور کو مبداء پر مس کرتے ہیں۔

اب اگر (۷) میں $\text{ج} = \text{لوگ ج}$ رکھیں تو $\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}}$ یا و، متغیر $\dfrac{\text{لا}}{\text{ج}}$ کے تفاعل کی شکل میں دریافت ہوتا ہے۔ بالفاظ دیگر ابتدائی حل لا، ما اور ج میں متجانس ہے

اور اس لئے یہ شکل ذیل کا ہوگا

$$\text{فما}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ج}} ، \frac{\text{ما}}{\text{ج}}\right) = ۰ \quad \ldots\ldots (۹)$$

یہ امر مذکورۂ بالا ہندسی خاصیت کے مطابق ہے کیونکہ اگر لا ، ما اور ج کو ایک ہی نسبت میں بدلا جائے تو مساوات (۹) میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔ یعنی ج کی قیمت کے بدل دینے سے منحنی کا صرف پیمانہ بدل جاتا ہے۔

۱۵۷ – مستقل سروں والی پہلے رتبہ کی خطی مساوات

کوئی مساوات جس میں ما اور اسکے مشتق صرف پہلے درجہ میں شریک ہوتے ہیں، خطی مساوات کہلاتی ہے۔ پس پہلے رتبہ کی خطی مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{پ ما} = \text{ق} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جہاں پ اور ق ، لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔

پہلے ہم اس صورت پر غور کرینگے جبکہ پ مستقل ہو کیونکہ بعد میں یہ صورت کارآمد ثابت ہوگی۔

اب مساوات ہے $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ا ما} = \text{ق} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر ق = ۰ تو دفعہ ۱۴۸ سے حل ہے

$$\text{ما} = \text{ج}\ \text{قو}^{\text{ا لا}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جزو ضربی $\text{قو}^{-\text{ا لا}}$ مساوات (۲) کے دائیں جانب کو ٹھیک مشتق بنا دیتا ہے۔ اس سے عام صورت (جبکہ ق ≠ ۰) کے حل کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

پس مساوات (۲) معادل ہے $$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\text{قو}^{-\text{ا لا}}\ \text{ما}\right) = \text{ق}\ \text{قو}^{-\text{ا لا}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

کے اور اسلئے $\text{فو}^{\text{ا لا}}\ \text{ما} = \int \text{ق}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}\ \text{فرلا} + \text{ج}$

یعنی $\text{ما} = \text{فو}^{\text{ا لا}} \int \text{ق}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}\ \text{فرلا} + \text{ج}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}$ ......(۵)

مروجہ دستور (دیکھو دفعہ ۱۹۶) کے مطابق (۵) کے بائیں جانب کی پہلی رقم کو خاص تکملہ اور دوسری رقم کو متمم تفاعل کہتے ہیں۔

ذیل کی صورتیں اہم ہیں

(آ) اگر $\text{ق} = \text{ح}\ \text{فو}^{\text{لہ لا}}$ ....(۶)

تو $\int \text{ق}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}\ \text{فرلا} = \text{ح} \int \text{فو}^{(\text{لہ}-\text{ا})\text{لا}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{ح}}{\text{لہ}-\text{ا}} \times \text{فو}^{(\text{لہ}-\text{ا})\text{لا}}$

اور $\text{ما} = \frac{\text{ح}}{\text{لہ}-\text{ا}} \times \text{فو}^{\text{لہ لا}} + \text{ج}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}$ ....(۷)

دیکھنے سے فوراً تصدیق ہوسکتی ہے کہ بائیں جانب کی پہلی رقم دی ہوئی مساوات کا خاص تکملہ ہے۔

(ب) نتیجہ (۷) کی تصحیح کی ضرورت ہوگی جبکہ لہ = ا

یعنی $\text{ق} = \text{ح}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}$ ....(۸)

۳۹۲ اس صورت میں $\int \text{ق}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}\ \text{فرلا} = \text{ح} \int \text{فرلا} = \text{ح}\ \text{لا}$

اور $\text{ما} = \text{ح}\ \text{لا}\ \text{فو}^{\text{ا لا}} + \text{ج}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}$ ....(۹)

(ج) اگر $\text{ق} = \text{ح}\ \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}$ ....(۱۰)

تو $\int \text{ق}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}\ \text{فرلا} = \text{ح} \int \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{فرلا} = \text{ح}\ \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$

اور $\text{ما} = \text{ح}\ \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \times \text{فو}^{\text{ا لا}} + \text{ج}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}$ ....(۱۱)

مثال (۱) ۔ اگر کسی ذرہ پر مزاحمت رفتار کے متناسب ہو اور وقت کے معلومہ تفاعل کے مساوی کوئی قوت اس پر عمل کر رہی ہو تو اس حرکت کی مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی ۔

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} + \text{ک ع} = \text{ف(ت)} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

اس کا تکملہ ہے

$$\text{ع} = \text{م قو}^{-\text{ک ت}} + \text{قو}^{-\text{ک ت}} \int \text{قو}^{\text{ک ت}}\, \text{ف(ت) فرت} \quad \ldots (۱۳)$$

مثلاً اگر ف(ت) = ج

$$\text{تو ع} = \text{م قو}^{-\text{ک ت}} + \frac{\text{ج}}{\text{ک}} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

یہ نتیجہ تفرقی مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھنے سے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے ۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ع} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}}\right) + \text{ک}\left(\text{ع} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}}\right) = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

$$\text{اس لئے ع} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}} = \text{م قو}^{-\text{ک ت}} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

جیسے ت بڑھتا ہے ع متقاربا انتہائی قیمت $\frac{\text{ج}}{\text{ک}}$ اختیار کرتا ہے ۔

مثال (۲) ۔ اگر لا طاقت کی برقی رو ایک دور میں سے بہہ رہی ہو اور دور کی ذاتی امالیت کی شرح ل ہو اور مزاحمت ز اور دور میں قوت محرکۂ برق ق ہو تو مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{ل} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ز لا} = \text{ق} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

اگر ق مستقل ہو تو اس کا حل ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ز}} + \text{ج قو}^{-\frac{\text{زت}}{\text{ل}}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

اس لئے رو کی مقدار نہائی مستقل قیمت $\frac{ق}{ز}$ کی طرف مائل ہوتی ہے۔

اب مثلاً فرض کرو کہ وقت ت = ۰ پر دور مکمل کر دیا گیا ہے تو ج کو اس شرط سے دریافت کیا ہے کہ لا = ۰ جبکہ ت = ۰۔ اس سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{ق}{ز} - \frac{ق}{ز} قو^{-\frac{زت}{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۹)$$

بائیں جانب کی دوسری رقم دور کے عین مکمل کرنے کے وقت کی زائد رو کو ظاہر کرتی ہے۔

نیز اگر $ق = ق_. جم(پ ت + ظه)$ ………… (۲۰)

تو $\frac{ف}{فت}(لا قو^{\frac{زت}{ل}}) = \frac{ق_.}{ل} قو^{\frac{زت}{ل}} جم(پ ت + ظه)$

اور اسکو تکمل کر کے قو$^{\frac{زت}{ل}}$ سے تقسیم کرنے پر

$$لا = ج قو^{-\frac{زت}{ل}} + \frac{ق_.}{ل} قو^{-\frac{زت}{ل}} \int قو^{\frac{زت}{ل}} جم(پ ت + ظه) فت$$

$$= ج قو^{-\frac{زت}{ل}} + \frac{ق_.}{ز^۲ + پ^۲ ل^۲}\left[ز جم(پ ت + ظه) + پ ل جب(پ ت + ظه)\right]$$

(۲۱) ………

دفعہ ۸۰ (۱۴) دیکھو۔

پس جیسے ت بڑھتا ہے رو ذیل کی یکساں اہتزازی قیمت اختیار کر لیتی ہے

$$لا = \frac{ق_.}{\sqrt{ز^۲ + پ^۲ ل^۲}} جم(پ ت + ظه - ظه_۱) \quad \ldots\ldots (۲۲)$$

جہاں $ظه_۱ = سر^{-۱} \frac{پ ل}{ز}$ ………… (۲۳)

اس لئے ذاتی امالیت ل کا اثر یہ ہے کہ یہ رو کے حیطہ کو نسبت $\frac{ز}{(ز^۲ + پ^۲ ل^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$ میں

کم کر دیتی ہے اور ہیئت کو بطور ظہا کے پیچھے ہٹا دیتی ہے۔

۱۵۸ - پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات -

اب ہم پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{پ ما} = \text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

پر غور کرینگے۔

$$\text{اگر ق} = 0 \text{ تو } \frac{1}{\text{ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{پ} = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\text{اس لئے لوگ ما} + \int \text{پ فر لا} = 1$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ما قو}^{\int \text{پ فر لا}} = \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اس سے ظاہر ہے کہ $\text{قو}^{\int \text{پ فر لا}}$ نتیجہ (۱) کا تکمل جزو ضربی ہے کیونکہ

$$\text{قو}^{\int \text{پ فر لا}} \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{پ ما} \right) = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \left(\text{ما قو}^{\int \text{پ فر لا}} \right)$$

اس لئے مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \left(\text{ما قو}^{\int \text{پ فر لا}} \right) = \text{ق قو}^{\int \text{پ فر لا}} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\text{اور تکمل کرنے سے} \quad \text{ما قو}^{\int \text{پ فر لا}} = \int \text{ق قو}^{\int \text{پ فر لا}} \text{فر لا} + \text{ج} \quad \ldots (5)$$

متکمل جزو ضربی عموماً مساوات کے صرف دیکھنے سے ہی معلوم ہو سکیگا اور اوپر کے قاعدہ کی ضرورت نہیں ہوگی۔

$$\text{مثال (۱)} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما ہم لا} = \text{۲ جم لا} \quad \ldots\ldots (6)$$

یہاں $\text{پ} = \text{مم لا}$ ، $\int \text{پ فرلا} = \text{لوک جب لا}$ ،

$$\text{ق}^{\int \text{پ فرلا}} = \text{جب لا}$$

اِس لئے جب لا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}(\text{ما جب لا}) = \text{۲ جب لا جم لا} \quad \ldots\ldots (۷)$$

یا $\text{ما جب لا} = \text{جب}^{۲}\text{لا} + \text{ج}$

اِس لئے $\text{ما} = \text{جب لا} + \frac{\text{ج}}{\text{جب لا}} \quad \ldots\ldots (۸)$

مثال (۲) ـ $(۱ - \text{لا}^{۲})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا ما} = ۱ \quad \ldots\ldots (۹)$

$(۱ - \text{لا}^{۲})$ سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}\,\text{ما} = \frac{۱}{۱ - \text{لا}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

یہاں $\text{پ} = \frac{-\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$ ، $\int \text{پ فرلا} = \frac{۱}{۲}\text{لوک}(۱ - \text{لا}^{۲})$ ، $\text{ق}^{\int \text{پ فرلا}} = \sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}$

نتیجہ (۱۰) کو تکمل جزو ضربی کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}\,\text{ما} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$$

یا $\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\left(\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}\;\text{ما}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$

تکمل کرنے سے $\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}\;\text{ما} = \text{جب}^{-۱}\text{لا} + \text{ج}$

یعنی $\text{ما} = \frac{\text{جب}^{-۱}\text{لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}} \quad \ldots\ldots (۱۲)$

مثال (۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ن}\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{لا}^{۳} \quad \ldots\ldots (۱۳)$

متکمل جزو ضربی واضح ہے اور عمل یہ ہے

$$لا^{ن} \frac{فرما}{فرلا} + ن لا^{ن-1} ما = لا^{م+ن}$$

$$یا \quad لا^{ن} ما = \frac{لا^{م+ن+1}}{م+ن+1} + ج$$

$$اس لئے \quad ما = \frac{لا^{م+1}}{م+ن+1} \quad ج لا^{-ن} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

۱۵۹- قائم خطوط رقی -

۳۶۵

فرض کرو کہ واحد لامتناہی منحنیات کا ایک قبیل ہے

$$فما (لا، ما، ج) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

جہاں ج متبدل ہے- ایسے منحنیات کی مساوات دریافت کرنی ہے جو اس قبیل کو ہر جگہ زاویہ قائمہ پر قطع کریں-

پہلے ہم قبیل کی تفرقی مساوات مرتب کرتے ہیں اس کے لئے (۱) کو بلحاظ لا کے تفرق کرکے ج کو ساقط کرنا چاہئے- دفعہ (۱۵۱) دیکھو-

اگر دو منحنی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں اور اگر نقاط تقاطع پر ان کے مماس لا محور سے زاویہ سا اور سَا بنائیں تو

$$سا - سَا = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$اور اسلئے \quad س سا = - مم سَا$$

پس ایک قبیل کی تفرقی مساوات دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات میں $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے $- \frac{1}{\frac{فرما}{فرلا}}$ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے-

بطریق دیگر :- اگر فرلا اور فرما، قبیل (۱) کے کسی منحنی کے چھوٹے جزو کے ظل ہوں تو $\frac{جف فما}{جف لا} فرلا + \frac{جف فما}{جف ما} فرما = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$

پس اگر فرلا اور فرما علی القویم منحنی کے نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنیوالے چھوٹے سے جزو کے ظل ہوں تو

فرلا / (جف ف / جف لا) = فرما / (جف ف / جف ما) ...... (۳)

اور قائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات (۱) اور (۳) میں سے ج کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر منحنیات کے دئے ہوئے قبیل کی مساوات قطبی محددوں میں یہ ہو

ف (ر، طہ، ج) = ۰ .... (۴)

اور اگر منحنی اور خط رمی کے مماس سمتی نیم قطر کے ساتھ بالترتیب زاویہ فہ اور فہَ بنائیں تو مذکورہ بالا طریقہ سے ظاہر ہے کہ

مس فہ = ـ مم فہَ

پس ایک قبیل کی تفرقی مساوات دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات میں ر (فرطہ / فرر) کی بجائے ـ (۱ / ر) (فرر / فرطہ) لکھنے سے حاصل ہوگی۔

۲۹۶

اب (۴) کو تفرق کرنے سے

(جف ف / جف ر) فرر + (۱ / ر) (جف ف / جف طہ) × ر فرطہ = ۰ (۵)

اس لئے خط رمی کے لئے

(جف ف / جف ر) ر فرطہ ـ (۱ / ر) (جف ف / جف طہ) فرر = ۰ (۶)

ج کو (۴) اور (۶) میں سے ساقط کرنے سے مطلوبہ قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال (۱) قائم زائدوں لا ما = ج .... (۷)
کے قائم خطوط رمی دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے لا فرما + ما فرلا = ۰ .... (۸)

پس خطوط رمی کے لئے $\text{لا}\ \text{فرلا} - \text{ما}\ \text{فرما} = ۰$ .... (۹)

اس لئے $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ج}$ .... (۱۰)

یہ مساوات قائم زائدوں کے قبیل کو ظاہر کرتی ہے جس کے محاور سمت میں پہلے قبیل کے متقاربوں پر منطبق ہوتے ہیں۔

مثال (۲) دائروں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\,\text{مہا}\,\text{ما} - \text{ک}^2 = ۰$ ..... (۱۱)

(جہاں مہا متبدل ہے) کے قائم خطوط رمی دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے $\text{لا}\ \text{فرلا} + (\text{ما} + \text{مہا})\ \text{فرما} = ۰$

پس رمی کے لئے $\text{لا}\ \text{فرما} - (\text{ما} + \text{مہا})\ \text{فرلا} = ۰$

اس مساوات اور (۱۱) میں سے مہا کے ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۲\,\text{لا}\,\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا}^2 - \text{ما}^2 - \text{ک}^2 = ۰ \quad ..... (۱۲)$$

یا $$\text{لا}\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{ما}^2) - \text{ما}^2 = -\text{لا}^2 + \text{ک}^2 \quad ..... (۱۳)$$

تابع متغیر ما^2 کے لحاظ سے یہ خطی مساوات ہے۔ دفعہ ۱۵۸ کے ضابطہ سے یا صرف دیکھنے سے ظاہر ہے کہ تکمل رخیز ضربی $\frac{1}{\text{لا}^2}$ ہے۔ پس اسکی مدد سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}}\right) = -۱ + \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2}$$

اس لئے $$\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}} = -\text{لا} - \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}} + ۲\,\text{لہا}$$

یعنی $$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۲\,\text{لہا}\,\text{لا} + \text{ک}^2 = ۰ \quad ..... (۱۴)$$

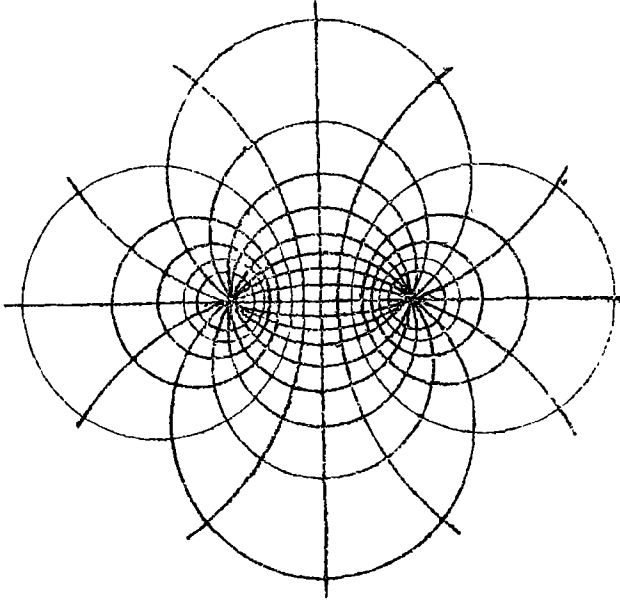
جہاں لہا اختیاری ہے۔

۱۹۷

ابتدائی مساوات ہم محور دائروں کے ایک نظام کو ظاہر کرتی ہے جو لا محور کو نقاط ($\pm$ ک، ۰) پر قطع کرتے ہیں، خطوط رمی (۱۴) ہم محور دائروں کا ایک دوسرا نظام ہے جس کے انتہائی نقطے یہ نقطے ہیں یعنی اگر رکھیں

لہ = ± گ تو نقطے دائرے حاصل ہوتے ہیں

(ل ∓ گ)۲ + ما۲ = ۰ .... (۱۵)

شکل ۱۳۵ دیکھو۔

شکل (۱۳۵)

مثال (۳) دائرے ر = ج جم طہ .... (۱۶)

مبدا میں سے گزرتے ہیں اور انکا مرکز ابتدائی خط پر ہے اور

فر ر / ر = مس طہ فرطہ .... (۱۷)

پس خطوط ارمی کے لئے ر فرطہ = مس طہ فر ر

یعنی فر ر / ر = مم طہ فرطہ .... (۱۸)

تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لوک ر = لوک جب طہ + مستقل

یا   ر = ج جب طہ .... (۱۹)

یہ مساوات دائروں کے ایک دوسرے نظام کو ظاہر کرتی ہے جو مبداء میں سے گزرتے ہیں اور ابتدائی خط کو مس کرتے ہیں۔

۱۶۰ — ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں —

۲۹۸

پہلے رتبہ اور ن ویں درجہ کی عام تفرقی مساوات اس شکل کی ہو گی

$$ع^ن + ف_۱ ع^{ن-۱} + ف_۲ ع^{ن-۲} + \ldots + ف_{ن-۱} ع + ف_ن = ۰$$

.... (۱)

$$\text{جہاں}\quad ع = \frac{فرما}{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اور $ف_۱$، $ف_۲$، .....، $ف_ن$ متغیروں لا، ما کے معلوم تفاعل ہیں اور عموماً یہ مان لیا جاتا ہے کہ یہ تفاعل جبریہ اور منطق ہیں۔

چونکہ مساوات (۱) ع میں ن ویں درجہ کی ہے اس سے ظاہر ہے کہ مستوی لا ما میں کے ہر مقررہ نقطہ میں سے ابتدائی منحنیات کی ن شاخیں گزرتی ہیں۔ یہ ممکن ہے کہ ان میں سے چند شاخیں خیالی ہوں یا لا اور ما کے خاص حدود کے لئے سب شاخیں خیالی ہوں نیز ممکن ہے کہ ایسے نقاط کا طریق جہاں ع کی دو مساوی قیمتیں ہیں حقیقی ہو۔ تفرقی مساوات کی اعلیٰ تحقیقات میں یہ طریق خاص اہمیت رکھتا ہے۔

مثال — دوسرے درجہ کی مساوات

$$ع^۲ + ف ع + ق = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

میں ع کی اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہونگی یا منطبق یا خیالی بموجب اسکے کہ $ف^۲ \gtreqless ۴ ق$ — اور ع کی دو مساوی قیمتوں کے نقاط کا طریق

منحنی $ف^2 = ۴ق$ ہوگا۔

اگر (۱) کا دایاں رکن، بلحاظ ع کے خطی اجزاء میں تحویل ہو سکے تو

$$(ع - ع_1)(ع - ع_2) \cdots\cdots (ع - ع_ن) = ۰ \quad \cdots\cdots (۴)$$

جہاں $ع_1، ع_2 \cdots\cdots ع_ن$ متغیروں لا، ما کے معلومہ تفاعل ہیں تو

مکمل حل ذیل کی جداگانہ مساواتوں کے حل کا مجموعہ ہوگا:۔

$$\frac{فرما}{فرلا} = ع_1،\ \frac{فرما}{فرلا} = ع_2،\ \cdots\cdots \frac{فرما}{فرلا} = ع_ن \quad \cdots\cdots (۵)$$

مثال:۔ $لا\,ما\,ع^2 - (لا^2 - ما^2)\,ع - لا\,ما = ۰ \quad \cdots\cdots (۶)$

یہ اس سے معادل ہے

$$(لا\,ع + ما)(ما\,ع - لا) = ۰ \quad \cdots\cdots (۷)$$

اور $لا\,ع + ما = ۰$، $ما\,ع - لا = ۰$ کے حل بالترتیب ہیں

$$لا\,ما = ج، \quad لا^2 - ما^2 = ج \quad \cdots\cdots (۸)$$

(۶) سے دی ہوئی ع کی دو قیمتوں کا حاصل ضرب (-۱) ہے اس سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے ابتدائی منحنیات کی دو شاخیں ایک دوسرے پر عمود القوائم ہیں۔ دفعہ ۱۵۹ کی مثال (۱) دیکھو۔

۱۶۱- کلیروی صورت۔

جب دفعہ ۱۶۰ والی مساوات (۱) آسانی سے خطی اجزاء میں تحویل نہ ہو سکے تو خاص صورتوں میں اور طریقے استعمال کئے جا سکتے ہیں لیکن ان طریقوں کا استعمال بہت محدود ہے اور اس لئے انہیں یہاں بحث میں نہیں دیا جائیگا۔ مگر کلیروی صورت کو اچھی طرح سے سمجھنا چاہئے کیونکہ اس کا اصول بہت سادہ ہے اور ایسے منحنیوں کی صورت میں جن کی تعریف کسی مماس کی خاصیت کی بنا پر کی گئی ہو یہ شکل اکثر پیدا ہوتی ہے۔

اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے ع لکھیں تو زیر غور صورت ہوگی

ہا = لا ع + ف (ع) .... (۱)

دفعہ ۶۰ میں ثابت کیا گیا ہے کہ منحنی کے مماس کے مقطوعے لا اور ہا محوروں پر عہا، بہا ہوں تو

عہا = (لا ع - ہا) / ع اور بہا = ہا - لا ع .... (۲)

پس (۱) کی صورت کی مساوات کسی ایک مقطوعہ اور مماس کی سمت میں ربط یا دونوں مقطوعوں میں ربط کو ظاہر کرتی ہے*

اب ظاہر ہے کہ کسی خط مستقیم کی مساوات جبکہ مقطوعوں میں دیا ہوا رشتہ ہے مذکورہ بالا ربط کو پورا کرے گی۔ ایسے خط کے ہر نقطہ پر

ع = ج .... (۳)

اور اس لئے حل ہے

ہا = ج لا + ف (ج) .... (۴)

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

لیکن اس مساوات کو وہ منحنی بھی پورا کریگا جس کے مماس، قبیل (۴) کے خطوط ہیں یعنی بہ الفاظ دیگر وہ منحنی جو اس قبیل کا لفاف ہے۔ لفاف کی مساوات اس شرط سے حاصل ہوتی ہے کہ ج میں مساوات (۴) کی دو اصلیں برابر ہیں یعنی (۴) اور

لا + فَ (ج) = ۰ .... (۵)

میں ج کو ساقط کرنے سے لفاف کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ دفعہ ۱۳۹ دیکھو۔

مذکورہ بالا حل کو دریافت کرنیکا عام طریقہ یہ ہے کہ مساوات (۱) کو بلحاظ لا کے تفرق کیا جائے۔

[* مساوات معادل ہے بہا = ف(- بہا/عہا) یا فہ(عہا، بہا) = ۰ کے]

پس $\text{ع} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} + \left[\text{لا} + \text{فَ(ع)}\right] \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$

اس لئے $\left[\text{لا} + \text{فَ(ع)}\right] \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = ۰$ ....(۶)

اس لئے ضروری ہے کہ $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = ۰$ ....(۷)

یا $\text{لا} + \text{فَ(ع)} = ۰$ ....(۸)

(۷) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$\text{ع} = \text{ج}$ اور اس لئے $\text{ما} = \text{ج لا} + \text{ف(ج)}$ ...(۹)

دوسرے نتیجہ (۸) اور (۱) میں سے ع کو ساقط کرنے سے لا اور ما میں ایک خاص ربط حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ (۱) اور (۸) میں سے ع کا حاصل اسقاط وہی ہے جو (۴) اور (۵) میں سے ج کا ہے اسلئے دوسرا حل مذکورۂ بالا لفاف ہوگا۔

حل (۹) جس میں ایک اختیاری مستقل ج ہے مکمل ابتدائی کہلاتا ہے۔ دوسرا حل یعنی لفافی حل مکمل ابتدائی میں شامل نہیں ہے یعنی ج کو کوئی خاص قیمت دینے سے یہ حاصل نہیں ہو سکتا اس لئے اس کو نادر حل کہتے ہیں*۔

مثال:- ایسے منحنی دریافت کرو جن کا پائیں منحنی بلحاظ نقطہ (ا، ۰) کے جس کو قطب مانا جائے لا = ۰ ہو۔

اس خاصیت کا اظہار $\text{ا} = \text{ع ب}$ ہے۔ جہاں ب، محور ما پر مقطوعہ ہے

اس لئے $\text{ما} = \text{لا ع} + \frac{\text{ا}}{\text{ع}}$ ....(۱۰)

[* ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساوات کے نادر حل کا عام نظریہ تفرقی مساوات کی خاص کتابوں میں مل سکتا ہے۔ لفاف کے نظریہ سے اسکو خاص تعلق ہے اگرچہ یہ اسقدر وسیع نہیں ہے]

اور اوسکا حل خطوط کا قبیل

$$\text{ما} = \text{ج}\,\text{لا} + \frac{1}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

ہے۔ نیز لفاف $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ .... (۱۲)

بھی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ دفعہ ۱۴۰ مثال (۲) دیکھو۔

امثلہ ۵
(تفرقی مساوات کی تکوین)

(۱) اگر $\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}$ تو ثابت کرو کہ $\text{لا}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} - \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = 0$

(۲) اگر $\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} - \frac{2}{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \frac{2\,\text{ما}}{\text{لا}^2} = 0$ ۳۰۱

(۳) اگر $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{ک}\,\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\text{ک}\,\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} - \text{ک}^2\,\text{ما} = 0$

(۴) اگر $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{عہ}\,\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{\text{بہ}\,\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} - (\text{عہ} + \text{بہ})\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{عہ}\,\text{بہ}\,\text{ما} = 0$$

(۵) اگر $\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا})\,\text{قو}^{\text{ک}\,\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} - 2\,\text{ک}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}$
$+ \text{ک}^2\,\text{ما} = 0$

(۶) اگر $\text{لا} = \text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ک}\,\text{ت}}\,(\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{ت} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{ت})$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}} + (\text{ن}^2 + \tfrac{1}{4}\text{ک}^2)\,\text{لا} = 0$$

(۷) اگر $\text{و} = \frac{\text{ا}}{\text{ر}} + \text{ب}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{۲}\text{و}}{\text{فر ر}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ر}} \frac{\text{فرو}}{\text{فر ر}} = ۰$

(۸) اگر $\text{ق} = \text{ا لوک ر} + \text{ب}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ق}}{\text{فر ر}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ر}} \frac{\text{فرق}}{\text{فر ر}} = ۰$

(۹) اگر $\text{فہ} = \frac{\text{ا قو}^{\text{ک ر}} + \text{ب قو}^{-\text{ک ر}}}{\text{ر}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{فہ}}{\text{فر ر}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ر}} \frac{\text{فرفہ}}{\text{فر ر}} - \text{ک}^{۲}\text{فہ} = ۰$$

(۱۰) اگر $\text{فہ} = \frac{\text{ا جم ک ر} + \text{ب جب ک ر}}{\text{ر}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{فہ}}{\text{فر ر}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ر}} \frac{\text{فرفہ}}{\text{فر ر}} + \text{ک}^{۲}\text{فہ} = ۰$$

(۱۱) اگر $\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\,\text{جم ک لا} + (\text{ج} + \text{د لا})\,\text{جب ک لا}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} + ۲\text{ک}^{۲}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{ک}^{۴}\text{ما} = ۰$

(۱۲) اگر $\text{ما} = \text{ا جمز ک لا} + \text{ب جبز ک لا} + \text{ج جم ک لا} + \text{د جب ک لا}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} = \text{ک}^{۴}\text{ما}$

(۱۳) اگر $\text{ما} = \left(\text{ا جمز}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}} + \text{ب جبز}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}}\right)\text{جم}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}}$

$$+ \left(\text{ج جمز}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}} + \text{د جبز}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}}\right)\text{جب}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}}$$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} + \text{ک}^{۴}\text{ما} = ۰$

(۱۴) اگر $\text{ما} = \text{ا جب}^{-۱}\text{لا} + \text{ب}$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱ - لا^۲)\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - لا \frac{فر ما}{فر لا} = ۰$$

(۱۵) اگر ما = (جب$^{-۱}$ لا)^۲ + اجب$^{-۱}$ لا + ب تو ثابت کرو کہ

$$(۱ - لا^۲)\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - لا \frac{فر ما}{فر لا} = ۲$$

(۱۶) اگر ما = اجم (لوک لا) + ب جب (لوک لا) تو ثابت کرو کہ

$$لا^۲ \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + لا \frac{فر ما}{فر لا} + ما = ۰$$

(۱۷) اگر ما = ا $\{لا + \sqrt{لا^۲ - ۱}\}^ن$ + ب $\{لا - \sqrt{لا^۲ - ۱}\}^ن$

تو ثابت کرو کہ $(لا^۲ - ۱)\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + لا \frac{فر ما}{فر لا} - ن^۲ ما = ۰$

(۱۸) ثابت کرو کہ ابتدائی ما = م لا + $\frac{۱}{م}$ سے جہاں م اختیاری ہے

تفرقی مساوات $لا\left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^۲ - ما \frac{فر ما}{فر لا} + ۱ = ۰$ حاصل ہوتی ہے

(۱۹) اگر ۲ ج ما + ج^۲ = لا^۲ جہاں ج اختیاری ہے تو ثابت کرو کہ

$$لا\left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^۲ - ۲ ما \frac{فر ما}{فر لا} - لا = ۰$$

(۲۰) ثابت کرو کہ ان مکافیوں کی تفرقی مساوات جنکے محاور ما محور کے

متوازی ہیں $\frac{فر^۳ ما}{فر لا^۳} = ۰$ ہے۔

(۲۱) ثابت کرو کہ ان تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات جنکے محاور تشاکل محور

لا پر منطبق ہوتے ہیں

$$ما \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2 = ۰ \text{ ہے}$$

۴۰۲ (۲۲) ثابت کرو کہ اُن تمام مخروطیوں کی تفرقی مساوات جن کے صدری محور محددوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں

$$لا ما \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + لا \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2 - ما \frac{فر ما}{فر لا} = ۰ \text{ ہے۔}$$

(۲۳) محور لا کو مبدأ پر مس کرنے والے تمام دائروں کی تفرقی مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = \frac{۲ لا ما}{لا^2 - ما^2} \text{ ہے}$$

(۲۴) ثابت کرو کہ اُن تمام مخروطیوں کی تفرقی مساوات جو محور ما کو مبداء پر مس کرتے ہیں اور جن کے مرکز محور لا پر ہیں

$$لا^2 ما \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + \left(لا \frac{فر ما}{فر لا} - ما\right)^2 = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۵) اگر $ما = \frac{لا^2 + ا^2}{لا^2 + ب^2}$ تو ثابت کرو کہ

$$لا (ما - ۱) \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = ۲ لا \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2 + (ما - ۱) \frac{فر ما}{فر لا}$$

(۲۶) ثابت کرو کہ اُن تمام زائدوں کی تفرقی مساوات جو مبداء میں سے گزرتے ہیں اور جن کے متقارب محددوں کے محوروں کے متوازی ہیں

$$لا ما \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} - ۲ لا \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2 + ۲ ما \frac{فر ما}{فر لا} = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۷) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{فر^2 ما}{فر ت^2} + ن^2 ما = ف(ت)$ کو ربط

$$ما = \frac{۱}{ن} جب ن ت \int ف(ت) جم ن ت فر ت$$
$$- \frac{۱}{ن} جم ن ت \int ف(ت) جب ن ت فر ت$$

پورا کرتا ہے اور یہی اس کا مکمل حل ہے۔

امثلہ ۵۱
(رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں)

(۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کو تکمیل کرو [$\text{ما} = \text{ج لا}$]

(۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ما}}{\text{لا}^2 - 1}$ کو تکمیل کرو [$\text{ما}^2 = \text{ج}\,\frac{\text{لا} - 1}{\text{لا} + 1}$]

(۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{مم لا مم ما}$ کو تکمیل کرو [$\text{جب لا جم ما} = \text{ج}$]

(۴) $\text{لا}^2 \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = 1$ کو تکمیل کرو [$\text{ما} = 1 + \text{ج قو}^{\frac{1}{\text{لا}}}$]

۴۰۴

(۵) $\text{م}(\text{ما} + \text{ب})\,\text{فرلا} + \text{ن}(\text{لا} + \text{ل})\,\text{فرما} = 0$ کو حل کرو
[$(\text{لا} + \text{ل})^{\text{م}}(\text{ما} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{ج}$]

(۶) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1 + \text{ما}^2}{1 + \text{لا}^2}$ کو حل کرو [$\text{ما} = \frac{\text{لا} + \text{ج}}{1 - \text{ج لا}}$]

(۷) $(1 + \text{ما}^2)\,\text{فرلا} - \text{لا ما}(1 + \text{لا}^2)\,\text{فرما} = 0$ کو حل کرو
[$(1 + \text{لا}^2)(1 + \text{ما}^2) = \text{ج لا}^2$]

(۸) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}(1 - \text{ما}^2)}{\text{لا}(1 - \text{لا}^2)}$ کو حل کرو [$\text{ما}^2(1 - \text{لا}^2) = \text{ج لا}^2(1 - \text{ما}^2)$]

(۹) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (\text{لا} + \text{ما})^2$ کو حل کرو [$\text{لا} + \text{ما} = \text{مس}(\text{لا} + \text{ج})$]

(۱۰) $(\text{لا} + \text{ما})^2\left(\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما}\right) = \text{لا ما}\left(1 + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)$ کو حل کرو۔

(۱۱) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان کا زاویہ سمتی زاویہ طہ کا نصف ہو۔
[صنوبری ر = ا (۱ - جم طہ)]

(۱۲) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں مبدا سے مماس پر کا عمود، نقطۂ تماس کے فصلہ کے مساوی ہو۔ [دائرے ر = ۲ ا جم طہ]

(۱۳) ایسے منحنی دریافت کرو جن کے مماس کا وہ حصہ جو محددوں کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہو جائے۔
[زائد لا ما = ج]

(۱۴) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں زیر مماس فصلہ کے متناسب ہے۔
[ما = ج لا^م]

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر کسی منحنی میں، زیر عماد کو فصلہ سے مستقل نسبت ہو تو یہ منحنی ایک مخروطی تراش ہوگی۔

(۱۶) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں معین کے قدم سے اگر مماس پر عمود کھینچا جائے تو اس کا طول مستقل (ا) ہو۔ [زنجیرے ما = ا جمز (لا - عہ)/ا]

(۱۷) ایسے منحنی دریافت کرو جن کا قطبی زیر مماس مستقل ا ہے۔
[ر = ا/(عہ - طہ)]

(۱۸) وہ منحنی دریافت کرو جن میں قطبی زیر عماد مستقل ہو [ر = ا (طہ - عہ)]

(۱۹) وہ منحنی دریافت کرو جنکے کسی دو معینوں کا درمیانی رقبہ، مقطوعہ قوس کے متناسب ہو۔ [زنجیرے ما = ا جمز (لا - عہ)/ا]

(۲۰) ایسے منحنی دریافت کرو جن کے کسی معین ما محور لا اور منحنی سے گھرا ہوا رقبہ، معین اور متناظر فصلے کے حاصل ضرب کا ن واں حصہ ہو۔
[ما = ج لا^(ن-۱)]

۴۰۵

(۲۱) ایسے گردشی مجسم کی شکل دریافت کرو جس کے کسی عمودی مقطوعے کا حجم تراش کے رقبہ اور محور کے طول کے حاصل ضرب کا ن واں حصہ ہے۔
[مکون منحنی کی مساوات ما^2 = ر لا$^{ن-1}$ ہے]

(۲۲) ایک یکساں طاقت والی لٹکی ہوئی سلاخ میں عمودی تراش کا رقبہ (س) اس میں کے کل زور کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر لا انتصاباً نیچے کی طرف ناپا جائے تو س اور لا میں رشتہ ذیل کی شکل کا ہے:

$$س = ا - ب \int^{لا} س \, فر لا$$

پس ثابت کرو کہ سلاخ کی شکل اس گردشی مجسم کی سی ہوگی جو

ما = ب ق و$^{لا/ر}$ کے منحنی کو محور لا کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۲۳) ایسے منحنی کی شکل دریافت کرو جو بلحاظ محور لا کے تشاکل ہے اور جس میں کسی دو گنے معین سے کٹے ہوئے رقبہ کا اوسط مرکز معین سے محور کے طول کے $\frac{1}{ن}$ فاصلے پر ہو۔　[ما = ج لا$^{ن-2}$]

سوالات ۲۴ تا ۲۳ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

(۲۴) (لا^3 + ۳ لا ما^2) فر لا + (ما^3 + ۳ لا^2 ما) فر ما = ۰

(۲۵) لا فر لا + ما فر ما = ر^2 $\frac{لا \, فر ما - ما \, فر لا}{لا^2 + ما^2}$

[لا^2 + ما^2 = ۲ ر^2 مس$^{-1}$ $\frac{ما}{لا}$ + ج]

(۲۶) لا $\frac{فر ما}{فر لا}$ − ما = $\frac{لا}{ر}$ $\sqrt{لا^2 + ما^2}$　[ما = لا جز $\frac{لا - ا}{ر}$]

(۲۷) لا $\frac{فر ما}{فر لا}$ − ما = م $\sqrt{لا^2 + ما^2}$

تفرقی مساوات اور اسکے ابتدائی کی ہندسی تعبیریں بیان کرو۔

$[\text{لا}^2 = 2\,\text{ج}\,\text{ما} + \text{ج}^2]$

(۲۸) $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2 - 2\text{لا}\,\text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}^2 - 2\text{لا}\,\text{ما}}$ $[\text{لا}\,\text{ما}(\text{لا} - \text{ما}) = \text{ج}]$

(۲۹) $\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{لا}\,\text{ما}$ $[\text{لا}\,\text{ما} = \text{ج}\,\text{فو}^{\text{لا}}]$

(۳۰) $\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = \text{لا}\,\text{ما}$ $[\text{ما} = \text{ج}\,\text{لا}\,\text{فو}^{\text{لا}}]$

(۳۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}(\text{لا} + \text{ما})}{\text{لا}(\text{ما} - \text{لا})}$ $[\text{لا}\,\text{ما} = \text{ج}\,\text{فو}^{\frac{\text{ما}}{\text{لا}}}]$

(۳۲) $(\text{لا}^2 - 3\text{ما}^2)\,\text{لا}\,\text{فرلا} = (\text{ما}^2 - 3\text{لا}^2)\,\text{ما}\,\text{فرما}$

$[(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2 = \text{ج}(\text{لا}^2 - \text{ما}^2)]$

(۳۳) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا}\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}}{\text{ا}'\text{لا} + \text{ب}'\text{ما} + \text{ج}'}$
ذیل کے ابدال سے متجانس بنائی جا سکتی ہے۔
$\text{ا}\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = \text{ضہا}$ اور $\text{ا}'\text{لا} + \text{ب}'\text{ما} + \text{ج}' = \text{عا}$

(۳۴) ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{ا}\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما})$ کی صورت کی مساوات
ابدال $\text{ا}\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} = \text{ی}$ سے حل کیجا سکتی ہے۔

(۳۵) بتاؤ کہ ذیل کی صورت کی مساوات کو کس طرح حل کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ا}\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}}{\text{ا}'\text{لا} + \text{ب}'\text{ما} + \text{ج}'}\right)$$

امثلہ ۵۲

(خطی مساوات)

سوالات ۱ تا ۹ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما مس لا} = \text{قط لا}$ [ما = جب لا + ج جم لا]

(۲) $(۱ - \text{لا}^۲)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{لا ما} = \text{ا لا}$ [ما = ا + ج $\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}$]

(۳) $\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{لا} + \text{ما} = ۰$ [$\text{لا}^۲ + ۲\,\text{لا ما} = \text{ج}$]

(۴) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = ۱$ [$\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا ما} = \text{ج}$]

(۵) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲\,\text{لا ما} = ۱ + ۲\,\text{لا}^۲$ [ما = لا + ج $\text{قو}^{-\text{لا}^۲}$]

(۶) $\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{۱ - \text{لا}^۲}{۱ + \text{لا}^۲}\,\text{ما} = ۱$

(۷) $\text{ا}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر طھ}} + \text{ا ع مس طھ} = \text{مس طھ}$ [ا ع = ا + ج جم طھ]

(۸) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما مس لا} - ۲\,\text{جب لا}$ [ما = جم لا + ج قط لا]

(۹) $\text{لا}(۱ - \text{لا}^۲)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + (۲\,\text{لا}^۲ - ۱)\,\text{ما} = \text{لا}^۳$

[ما = لا + ج لا $\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}$]

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ف ما} = \text{ق ما}^{\text{ن}}$

ابدال $\text{ما}^{-(\text{ن}-۱)} = \text{ی}$ سے خطی بنائی جاسکتی ہے

[برنولی کی مساوات]

۴۰۷

(۱۱) حل کرو $\frac{لا\ فر ما}{فر لا} + ما = ما^2 لوک لا$ ، $\left[\frac{1}{ما} = 1 + لوک لا + ج لا\right]$

(۱۲) حل کرو جم لا $\frac{فر ما}{فر لا}$ − ما جب لا + ما^2 = ۰ ، $\left[\frac{1}{ما} = جب لا + ج جم لا\right]$

(۱۳) اگر گنجائش (گ) والے مکثفہ کی دونوں تختیوں کو ایسے تار سے ملا دیا جائے جسکی مزاحمت (ر) ہے اور ذاتی امالہ کی شرح صفر ہے تو برقی بار (بھ) اور قوت محرکہ برق (ق) میں ذیل کا رشتہ ہے۔

$$ق = ر \frac{فر بھ}{فر ت} + \frac{بھ}{گ}$$

اس مساوات کو تکمل کرو جبکہ ق = ۰ ، ق = مستقل ،

$$ق = ق . جم (پ ت + صہ)$$

امثلہ ۵۳

علی القوائم خطوط رمی

(۱) خطوط ما = ج لا کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

[دائرے لا^2 + ما^2 = ج]

(۲) منحنیات $ر^{ن-1}$ ما = $لا^{ن}$ کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو

[مخروطات لا^2 + ن ما^2 = ج]

(۳) دائروں لا^2 + ما^2 = ۲ ج ما کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

[دائرے لا^2 + ما^2 = ۲ ج لا]

(۴) کن منحنیات کے لئے $\frac{فر ما}{فر لا} = \frac{ما^3 + 3 لا^2 ما}{لا^3 + 3 لا ما^2}$ ، نیز ان کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

[(لا^2 − ما^2)^2 = ج لا ما] ، [لا^4 + ۶ لا^2 ما^2 + ما^4 = ج]

(۵) ثابت کرو کہ ہم ماسکہ مکافیوں $ما^2 = 4 ا (لا + ا)$ کی تفرقی مساوات ہے

$$ما ع^2 + 2 لا ع - ما = 0 \text{ جہاں } ع = \frac{فرما}{فرلا}$$

ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔ اور اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

(۶) ثابت کرو کہ ہم ماسکہ مخروطیوں $\frac{لا^2}{ا^2 + لہ} + \frac{ما^2}{ب^2 + لہ} = 1$ کی تفرقی مساوات ۴۰۸

$$لا ما ع^2 + (لا^2 - ما^2 - ا^2 + ب^2) ع - لا ما = 0 \text{ ہے۔}$$

ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔ اور نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۷) قائم زائد قطعات کا ایک نظام ثابت نقطوں $(\pm ا، 0)$ میں سے گزرتا ہے اور ان کا مرکز مبدا ء پر ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے علی القوائم خطوط، لیمنی کے بیضوی ہیں

$$(لا^2 + ما^2)^2 = 2 ا^2 (لا^2 - ما^2) + ج$$

(۸) ثابت کرو کہ مکافی $ما^2 = 4 ا لا$ کے دریچوں کی تفرقی مساوات ہے

$$لا + ما \frac{فرما}{فرلا} + ا \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2 = 0$$

(۹) ثابت کرو کہ دائرہ $لا^2 + ما^2 = ا^2$ کے دریچہ کی تفرقی مساوات ہے

$$لا^2 - ا^2 + 2 لا ما \frac{فرما}{فرلا} + (ما^2 - ا^2) \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2 = 0$$

(۱۰) خطوط صنوبری $ر = ا (1 - جم طہ)$ کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

[صنوبری $ر = ب (1 + جم طہ)$]

(۱۱) ثابت کرو کہ منحنیات $ر^م = ا^م جم م طہ$ کے علی القوائم خطوط رمی $ر^م = ب^م جب م طہ$ ہیں۔

خاص صورتوں $م = 1، -1، 2، -2، \frac{1}{2}، -\frac{1}{2}$ میں نتیجہ کی ہندسی

تعبیر بتاؤ۔

(۱۲) ثابت کرو کہ منحنیات ر۲ = ا جم طہ کے علی القوائم خطوط رمی ر = ب جب۲ طہ ہیں۔

(۱۳) اگر دو قطبی محددوں میں (دفعہ ۱۳۲) منحنیات کے قبیل کی مساوات ف(ر، ر) = ج ہو تو ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات

ر (جف ف / جف ر) فرطہ = ر (جف ف / جف ر) فرطہ ہوگی۔

پس دکھاؤ کہ دائرے ر / ر = ج کے علی القوائم خطوط رمی دوسرے دائرے طہ + طہ = ج ہیں۔

(۱۴) ثابت کرو کہ کیسینی کے بیضوی ر ر = ج کے علی القوائم خطوط رمی قائم زائد طہ ـ طہ = ج ہیں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ ہم قوہ منحنیات ۱/ر ـ ۱/ر = ج کے علی القوائم خطوط رمی متقاطیسی منحنیات جم طہ + جم طہ = ج ہیں۔

امثلہ ۵۴

(اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں)

سوالات ۱ تا ۱۰ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) (فرما / فرلا)۲ ـ (عہ + بہ) (فرما / فرلا) + عہ بہ = ۰

[ما = عہ لا + ج، ما = بہ لا + ج۰]

(۲) (فرما / فرلا)۲ = جب۲ لا [ما = ج ± جم لا]

(۳) $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲ = \text{م}^۲ \text{ما}^۲$ [$\text{ما} = \text{ج قو}^{\pm \text{م لا}}$]

(۴) $\text{ما}^۲ \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲ = ۴ \text{ا}^۲$ [$\text{ما}^۲ = \text{ج} \pm ۴ \text{ا لا}$]

(۵) $\text{لا} \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲ = \text{ا}$ [$\text{ما} = \text{ج} \pm ۲ \sqrt{\text{ا لا}}$]

(۶) $(۱ - \text{لا}^۲) \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲ = ۱$ [$\text{ما} = \text{ج} \pm \text{جب}^{-۱} \text{لا}$]

(۷) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما}\right) = \text{لا} (\text{لا} + \text{ما})$

[$\text{ما} = \frac{۱}{۲} \text{لا}^۲ + \text{ج}$، $\text{ما} = ۱ - \text{لا} + \text{ج قو}^{-\text{لا}}$]

(۸) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{لا}\right) = (\text{لا} + \text{ما}) \text{ما}$

[$\text{ما} = \text{ج قو}^{\text{لا}}$، $\text{ما} = ۱ - \text{لا} + \text{ج قو}^{-\text{لا}}$]

(۹) $\text{لا} \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲ - ۲ \text{ما} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{لا} = ۰$ [$\text{لا}^۲ = ۲ \text{ج ما} + \text{ج}^۲$]

(۱۰) $\text{ما} \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲ + ۲ \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما} = ۰$ [$\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲} = \text{ج} \pm \text{لا}$]

(۱۱) ایسے منحنی دریافت کرو کہ محددوں کے محوروں سے مماس کے مقطوعوں کا حاصل ضرب مستقل $\text{ک}^۲$ کے مساوی ہو۔ [زائد $۴ \text{ لا ما} = \text{ک}^۲$]

(۱۲) ایسے منحنی دریافت کرو کہ مبداء سے کسی مماس پر عمود ا کے مساوی ہو۔ [دائرے $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = \text{ا}^۲$]

(۱۳) حل کرو $\text{ما} = \text{لا ع} + \sqrt{\text{ب}^۲ + \text{ا}^۲ \text{ع}^۲}$ [نادر حل $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱$]

(۱۴) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نقطوں (± ج، ۰) سے کسی مماس پر عمودوں کا

حاصل ضرب ب^۲ کے مساوی ہو۔ [مخروطات $\frac{لا^۲}{ب^۲+ج^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$،
$\frac{لا^۲}{ج^۲-ب^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$]

(۱۵) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نقاط (± ا، ۰) کے معینون پر مماس جو حصے کاٹتا ہے اُن کا حاصل ضرب ب^۲ کے مساوی ہو۔
[مخروطیاں $\frac{لا^۲}{ا^۲} \pm \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$]

(۱۶) حل کرو ما = لا ع + ا ع (۱ - ع)
[نادر حل (لا + ا)^۲ = ۴ ا ما]

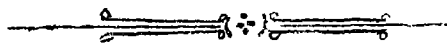
(۱۷) حل کرو (لا - ا) ع^۲ + (لا - ما) ع - ما = ۰
[نادر حل (لا + ما)^۲ = ۴ ا ما]

(۱۸) ایسے منحنی دریافت کرو کہ محددوں کے محوروں پر مماس کے مقطوعوں کا حاصل جمع ا کے مساوی ہو۔ [مکافی (لا - ما)^۲ - ۲ا (لا + ما) + ا^۲ = ۰]

(۱۹) ثابت کرو کہ لا + ما $\frac{ف ما}{ف لا}$ = ف ($\frac{ف ما}{ف لا}$) کی قسم کی تفرقی مساوات متوازی منحنیات کے ایک نظام کو ظاہر کرتی ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ ف (لا، ما، ع - $\frac{۱}{ع}$) = ۰ کی قسم کی تفرقی مساوات قائم منحنیات کے دو نظاموں کو ظاہر کرتی ہے۔

۴/۱۱

بارھواں باب

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۱۶۲ — نمونہ $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ = ف (لا) کی مساواتیں —

یہ باب زیادہ تر دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتوں کے لئے مخصوص ہے اور اس میں خصوصاً ایسے نمونہ کی مساواتوں پر غور کیا جائے گا جو احصاء کے ہندسی اور طبیعی اطلاقات میں عموماً کام آتی ہیں۔ بعض صورتوں میں اعلیٰ رتبہ کی مساواتوں کے لئے ان طریقوں کی توسیع ہو سکیگی۔

پہلے ہم چند خاص صورتوں پر غور کرینگے اور پھر دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات پر۔ مستقل سروں والی ن۔ ویں رتبہ کی عام خطی مساوا پر اگلے باب میں بحث کیجائے گی۔

سب سے پہلے صورت $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ = ف (لا) .... (۱) پر غور کرو۔
اسکو حل کرنے کے لئے بلحاظ لا کے صرف دو سادہ تکملوں کی ضرورت ہے

یعنی
$$\frac{فر ما}{فر لا} = \int ف(لا)\, فر لا + ا$$

اور
$$ما = \int \left[\int ف(لا)\, فر لا \right] فر لا + ا لا + ب \quad ....(۲)$$

جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

مثال (۱) ۔ حرکیاتی مساوات $\frac{\text{ف}^2\,\text{لا}}{\text{ف ت}^2} = \text{ف (ت)}$ ....(۳)

ایک ذرہ کی ایسی خطی حرکت کو بیان کرتی ہے جس میں قوت، وقت کا معلوم تفاعل ہے۔ یہ مساوات مذکورۂ بالا صورت کی ہے صرف ترقیم میں ذرا سا فرق ہے۔
مستقل اسراع (ج) والے ذرہ کی صورت میں مساوات ہے

$$\frac{\text{ف}^2\,\text{لا}}{\text{ف ت}^2} = \text{ج} \qquad \text{........(۴)}$$

اس لئے

$$\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}} = \text{ج ت} + \text{ا}$$

اور

$$\text{لا} = \tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}^2 + \text{ا ت} + \text{ب} \qquad \text{........(۵)}$$

نیز اگر

$$\frac{\text{ف}^2\,\text{لا}}{\text{ف ت}^2} = \text{ک جب ن ت} \qquad \text{........(۶)}$$

یعنی قوت، وقت کا سادہ موسیقی تفاعل ہے تو

$$\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}} = -\frac{\text{ک}}{\text{ن}}\,\text{جم ن ت} + \text{ا}$$

اور

$$\text{لا} = -\frac{\text{ک}}{\text{ن}^2}\,\text{جب ن ت} + \text{ا ت} + \text{ب} \qquad \text{........(۷)}$$

اِس سوال کے مستقلات ا اور ب اِس شرط سے مقرر کئے جا سکتے ہیں کہ کسی خاص آن پر ذرہ دئے ہوئے مقام پر ہو اور اس کی رفتار کسی دی ہوئی مقدار کے مساوی ہو۔

مثال (۲) ۔ مساوات $\text{ب}\,\frac{\text{ف}^2\,\text{ما}}{\text{ف لا}^2} - \text{و (ل} - \text{لا)} = ۰$ ....(۸)

کا ایسا حل دریافت کرو جو ذیل کی شرائط کو پورا کرے۔

$$\text{لا} = ۰ \text{ کے لئے } \frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \text{ما} = ۰$$

دراصل یہ سوال ایک ایسی سلاخ کے خم دریافت کرنے کا ہے جس کا ایک سرا لا = ۰ افقی وضع میں جکڑ دیا گیا ہے اور دوسرے سرے لا = ل سے معلومہ وزن (و) لٹک رہا ہے۔

(۸) کو دو مرتبہ متواتر تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و}\left(\text{ل لا} - \frac{1}{2}\,\text{لا}^{2}\right) + \text{ا}$$

$$\text{اور ب ما} = \text{و}\left(\frac{1}{2}\,\text{ل لا}^{2} - \frac{1}{6}\,\text{لا}^{3}\right) + \text{ا لا} + \text{ج} \quad \ldots\ldots (9)$$

جہاں ا اور ج اختیاری ہیں۔

اور حدودی شرائط سے حاصل ہوتا ہے کہ ا = ۰ اور ج = ۰

$$\text{اس لئے ما} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}}{\text{ب}}\,\text{لا}^{2}\left(\text{ل} - \frac{1}{3}\,\text{لا}\right) \quad \ldots\ldots (10)$$

۱۶۳ — $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \text{ف(ما)}$ کے نمونہ کی مساواتیں۔

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \text{ف(ما)} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

کے نمونہ کی مساوات کا پہلا تکملہ دو طریقوں سے حاصل ہو سکتا ہے۔ پہلے طریقہ میں دونوں جانب کو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ سے ضرب دیکر بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}\right) = \text{ف(ما)}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2} = \int \text{ف(ما)}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} + \text{ا}$$

$$= \int \text{ف(ما)}\,\text{فرما} + \text{ا} \quad \ldots\ldots (2)$$

۴۱۴ دوسرے طریقہ میں $\frac{فر ما}{فر لا}$ کے لئے علامت (ع) رکھو، چونکہ

$$\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = \frac{فر ع}{فر لا} = \frac{فر ع}{فر ما} \times \frac{فر ما}{فر لا} = ع \frac{فر ع}{فر ما} \quad \ldots\ldots (3)$$

اس لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$ع \frac{فر ع}{فر ما} = ف(ما) \quad \ldots\ldots (4)$$

یہ تابع متغیر ع اور متبوع متغیر ما میں پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے (۴) کو بلحاظ ما کے تکمل کرنے سے

$$\frac{1}{2} ع^2 = \int ف(ما) فر ما + ا \quad \ldots\ldots (5)$$

... (۲) کے معادل ہے۔
... تکمل کرنیکے لئے (۲) کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{فر ما}{\sqrt{2 \int ف(ما) فر ما + 2 ا}} = \pm فر لا \quad \ldots\ldots (6)$$

یہاں متغیر الگ الگ ہیں (دفعہ ۱۵۴) لیکن نسب نما میں جذر کی موجودگی کی وجہ سے تفاعل ف(ما) کی آسان شکلوں کے لئے بھی اس کو تکمل کرنا دشوار ہوتا ہے۔

اس مساوات کی ایک ضروری شکل وہ ہے جس میں ف(ما)، متغیر ما کا خطی تفاعل ہو، یہ مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + ا ما = ب \quad \ldots\ldots (7)$$

تابع متغیر ما کی بجائے $ما_1 + \frac{ب}{ا}$ لکھکر بعد میں $ما_1$ کا آخری نشان نکالدینے سے مساوات (۷) آسان تر شکل

فر² ما / فر لا² + ا ما = ۰ . . . . (۸)

میں تحویل ہو جاتی ہے۔

اس کا پہلا تکملہ ہے (فر ما / فر لا)² + ا ما² = ج . . . . (۹)

اگر ا مثبت ہے تو لکھو √ا = م اور ج = م² عہ² . . . . (۱۰)

اور یہ ظاہر ہے کہ اگر ہم صرف حقیقی مقداروں پر ہی توجہ محدود رکھیں تو ج لازماً مثبت ہوگا۔

پس

فر ما / √(عہ² − ما²) = ± م فر لا . . . . (۱۱)

یعنی جم⁻¹ (ما / عہ) = ± (م لا + صہ)

یا ما = عہ جم (م لا + صہ) . . . . (۱۲)

یہ مساوات (۸) کا مکمل حل ہے اور اس میں دو اختیاری مستقل عہ اور صہ ہیں۔

اگر عہ جم صہ = ا اور − عہ جب صہ = ب . . . (۱۳)

رکھیں تو حل کی معادل شکل

ما = ا جم م لا + ب جب م لا . . . . (۱۴)

حاصل ہوتی ہے۔ یہ نتیجے بہت اہم ہیں اور انہیں یاد رکھنا چاہیئے۔

ا کے منفی ہونے کی صورت میں فرض کرو کہ ا = − م² اور اسی طرح عمل کرنے پر مکمل حل حاصل ہوگا

ما = ا جمز م لا + ب جبز م لا . . . . . . (۱۵)

جہاں م = √(− ا)

اس صورت کے حل کرنے کا زیادہ آسان طریقہ آگے دیا جائیگا۔

نمونہ (۱) کی مساوات حرکیات میں بہت عام ہے مثلاً ایک ذرہ کی

۴۱۴

خطی حرکت کی مساوات جس پر ایک ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو ذرہ کے مقام کے معلومہ تفاعل کے متناسب ہے ذیل کی شکل کی ہے

$$\frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} = ف(لا) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

اور یہ (۱) کے مطابق ہے اگر مختلف ترقیم کا لحاظ رکھا جائے۔

تکمل کے پہلے طریقے میں طرفین کو $\frac{فرلا}{فرت}$ سے ضرب دیا جاتا ہے

یعنی $\frac{فرلا}{فرت} \times \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} = ف(لا)\frac{فرلا}{فرت}$

اور بلحاظ ت کے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{فرلا}{فرت}\right)^۲ = \int ف(لا)\frac{فرلا}{فرت}\,فرت + ج$$

$$= \int ف(لا)\,فرلا + ج \quad \ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

جو "توانائی کی مساوات" کہلاتی ہے۔

دوسرے طریقے میں $\frac{فرلا}{فرت}$ کی بجائے (ع) لکھتے ہیں اور اس لئے

$\frac{فر^۲ لا}{فرت^۲}$ کی بجائے $ع\frac{فرع}{فرلا}$ (دفعہ ۲۳ دیکھو)

پس $ع\frac{فرع}{فرلا} = ف(لا)$

اور بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے

$$\frac{۱}{۲}ع^۲ = \int ف(لا)\,فرلا + ج \quad \ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

نتیجہ (۱۷) کے مطابق ہے۔

مثال (۱)۔ اگر ایک ذرہ پر مبداء کی جانب، فاصلہ کے متناسب قوت کشش

عمل کر رہی ہے تو اسکی حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} = -\text{مہ لا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

یہ مساوات خاص صورت (۸) کی ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$\text{لا} = \text{ا جم}\left(\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} + \text{صہ}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

یہ سادہ موسیقی حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔ لا اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$ کی قیمتیں تکراریاتی ہیں جبکہ $\sqrt{\text{مہ}}$ ت کی قیمت میں ۲ π کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لئے مدت اہتزاز $\frac{2\pi}{\sqrt{\text{مہ}}}$ ہے۔ اس حل کے اختیاری مستقلات ا اور صہ بالترتیب حیطہ اور آن کہلاتے ہیں۔

ایک درجہ کی آزادی والے کسی "بقائی" حرکیاتی نظام کی مساوات حرکت بھی جب نظام کو قائم توازن کی حالت سے ذرہ سا ہٹا دیا جاتا ہے (۱۹) کی صورت کی ہوتی ہے۔

مثلاً رقاص کی صحیح مساواتِ حرکت

$$\text{ل}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{طہ}}{\text{فر ت}^{2}} = -\text{ج جب طہ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

ہے۔ جہاں ج اسراع بجاذبہ ارض ہے اور ل ایک خاص طول ہے جو رقاص کی بناوٹ پر منحصر ہے۔ سادہ رقاص کی صورت میں ل ڈوری کا طول ہے۔ اگر حالت توازن سے انتہائی زاویہ ہٹاؤ ایک چھوٹا زاویہ ہو تو جب طہ کی بجائے طہ لکھ سکتے ہیں اور

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{طہ}}{\text{فر ت}^{2}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\ \text{طہ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

اس مساوات کا حل ہے $\text{طہ} = \text{عا جم}\left(\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\ \text{ت} + \text{صہ}\right) \qquad \ldots\ldots (23)$

اور اس لئے دور $2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ ہے۔

صحیح مساوات (۲۱) مذکورۂ بالا طریقہ سے ایک مرتبہ تکمل کی جاسکتی ہے جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{ل}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{ج جم طہ} + \text{ا} \qquad (۲۴)$$

لیکن (سوائے خاص صورت ا = ج کے) دوسرا تکمل ناقصی تفاعلوں کی مدد کے بغیر دریافت نہیں ہوسکتا۔

مثال (۳) اگر ایک ذرہ سیدھے خط میں حرکت کر رہا ہو اور اس پر قوت کشش مبداء سے فاصلہ کے مربع کی معکوس نسبت میں بدلتی ہو تو

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^2} \qquad (۲۵)$$

اس لئے دفعہ ۵۴۱ کی مثال (۳) سے

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{لا}} + \text{ج} \qquad (۲۶)$$

۴۱۶ اور اگر ذرہ فاصلہ ا پر سکون سے حرکت شروع کرے تو

$$\text{ج} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ا}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -\sqrt{\frac{۲\,\text{مہ}}{\text{ا}}} \times \sqrt{\frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}}} \qquad (۲۷)$$

منفی علامت لینے کی وجہ یہ ہے کہ رفتار مبداء کی طرف ہے۔ دوسرے تکمل میں ابدال

$$\text{لا} = \text{ا جم}^2\,\text{طہ} \qquad (۲۸)$$

سہولت دہ ہے۔ متغیروں کو جدا کرنے پر

$$(۱ + \text{جم ۲ طہ})\,\text{فرطہ} = \left(\frac{۲\,\text{مہ}}{\text{ا}^3}\right)^{\frac{1}{2}} \text{فرت} \qquad (۲۹)$$

$$\text{اسلئے طہ} + \frac{1}{2}\,\text{جب ۲ طہ} = \left(\frac{۲\,\text{مہ}}{\text{ا}^3}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ت} + \text{ج} \qquad (۳۰)$$

اور جیسے لا ، ا سے صفر تک گھٹتا ہے ویسے ط ما ، صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے ۔ پس مقام سکون سے جو فاصلہ ا پر ہے مرکز کشش تک گرنے کا وقت (ت_1) ذیل کے جملہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت}_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \times \frac{\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

۱۶۴ ۔ تفرقی مساواتیں جنہیں صرف پہلے اور دوسرے رتبہ کے مشتق موجود ہوں

اگر مساوات ذیل کی صورت کی ہو

$$\text{فہا}\left(\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} ، \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right) = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

جس میں متغیر لا اور ما صریحی طور پر شریک نہیں ہوتے تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے (ع) لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہا}\left(\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} ، \text{ع}\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

اور یہ تابع متغیر (ع) میں پہلے رتبہ کی مساوات ہے ۔

مساوات (۱) دفعہ ۱۶۳ کے مطابق $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ کی بجائے $\text{ع}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر ما}}$ لکھنے سے بھی پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل ہو سکتی ہے ۔ اس میں ما متبوع متغیر ہوگا ۔

اس طرح
$$\text{فہا}\left(\text{ع}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر ما}} ، \text{ع}\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

مثال (۱) ۔ ایسے منحنی دریافت کرو جن کا نصف قطر انحنا مستقل (ل) ہے ۔

دفعہ ۱۳۵ سے

$$\frac{\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2}}{\left\{1+\left(\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{1}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

یا

$$\frac{\text{فر}\,\text{ع}}{\left\{1+\text{ع}^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

اِس کو تکمل کرنے سے (دفعہ ۷، نتیجہ ۱۳)

$$\frac{\text{ع}}{\left\{1+\text{ع}^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

جہاں عہ اختیاری مستقل ہے

اِس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \text{ع} = \pm\frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\left\{\text{ر}^2-(\text{لا}-\text{عہ})^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (7)$$

اس لئے $\text{ما}-\text{بہ} = \pm\left\{\text{ر}^2-(\text{لا}-\text{عہ})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots (8)$

جہاں بہ آخری تکمل کا اختیاری مستقل ہے۔

یہ نتیجہ ذیل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$(\text{لا}-\text{عہ})^2+(\text{ما}-\text{بہ})^2=\text{ر}^2 \quad \ldots\ldots (9)$$

جو نصف قطر ر والے دائروں کے قبیل کو ظاہر کرتا ہے۔ مذکورۂ بالا عمل عام طریقہ کی مثال کے طور پر دیا گیا ہے اگرچہ اِس سوال کا حل اور طریقوں سے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال (۲)۔ ذرہ کی خطی حرکت دریافت کرو جس پر ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو رفتار کا ایک معلومہ تفاعل ہے۔

اسلئے حرکت کی مساوات ہے $\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}^2} = \text{ف}\left(\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}}\right) \quad \ldots\ldots (10)$

ظاہر ہے کہ یہ صورت (۱) کے تحت آتی ہے۔ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ کی بجائے (و) لکھنے سے

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ف(و)}$$

یا

$$\frac{\text{فرو}}{\text{ف(و)}} = \text{فرت}$$

اس لئے

$$\int \frac{\text{فرو}}{\text{ف(و)}} = \text{ت} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

مثلاً اگر ذرہ پر کل مزاحمت رفتار کے متناسب ہے تو

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = -\text{ک و} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

اس لئے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{و} = \text{ا}\ \text{قو}^{-\text{ک ت}}$$

اور

$$\text{لا} = -\frac{1}{\text{ک}} \times \text{ا}\ \text{قو}^{-\text{ک ت}} + \text{ب} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

اب ذرہ کو خواہ کسی طرح پھینکا جائے، جیسے ت بڑھتا ہے لا متقارباً انتہائی قیمت ب کے قریب آتا جاتا ہے۔

نیز اگر مزاحمت رفتار کے مربع کی طرح بدلے تو

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = -\text{ک و}^2$$

یا

$$-\frac{\text{فرو}}{\text{و}^2} = \text{ک فرت}$$

اس لئے

$$\frac{1}{\text{و}} = \text{ک ت} + \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

لہٰذا

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{و} = \frac{1}{\text{ک ت} + \text{ا}}$$

اور لا = ۱/ک لوک (ک ت + ا) + ب ......(۱۵)

(۲) سے ظاہر ہے کہ اگرچہ رفتار (و) تقارباً صفر ہوتی ہے تاہم طے شدہ فاصلہ کی کوئی انتہا نہیں ہے۔

۴۱۸ اگر ہم دوسرا طریقہ استعمال کریں تو (۱۰) کی بجائے

مساوات و (فرو/فرلا) = ف (و) ....(۱۶)

حاصل ہوتی ہے۔ اب اِس صورت میں جبکہ مزاحمت رفتار کے متناسب ہے

فرو/فرلا = -ک اور و = -ک لا + ج ......(۱۷)

پس فرلا/فرت + ک لا = ج ....(۱۸)

اور دفعہ ۱۵۷ سے لا = ج/ک + د فو^(-ک ت) ....(۱۹)

جہاں ج اور د اختیاری مستقل ہیں۔ یہ نتیجہ (۱۳) کے مطابق ہے۔
نیز اگر مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہو تو

فرو/فرلا = -ک و اور و = ج فو^(-ک لا) ....(۲۰)

پس فو^(ک لا) فرلا/فرت = ج

اس لئے ۱/ک فو^(ک لا) = ج ت + د ....(۲۱)

یعنی ک لا = لوک (ک ج ت + ک د) ....(۲۲)

(۱۵) میں ا = ک د/ج اور ک ب = لوک ج رکھنے سے اِس امر کی

تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ نتیجہ (۱۵) سے مختلف نہیں ہے۔

۱۶۵۔ مساواتیں جن میں ایک متغیر موجود نہیں ہے۔

(آ) اگر تابع متغیر صریحاً موجود نہ ہو تو مساوات ذیل کی صورت کی ہوگی

$$فہ \left(\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} ، \frac{فر ما}{فر لا} ، لا \right) = ۰ \quad ....(۱)$$

اس میں $\frac{فر ما}{فر لا}$ کی بجائے ع لکھنے سے، ع میں پہلے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ یعنی

$$فہ \left(ع ، \frac{فر ع}{فر لا} ، لا \right) = ۰ \quad ....(۲)$$

اگر اس کا حل

$$ع = ف (لا ، ا) \quad ....(۳)$$

کی شکل میں رکھا جا سکتا ہے جہاں ا اختیاری مستقل ہے، تو دوسرے تکمل سے حاصل ہوگا

$$ما = \int ف (لا ، ا) فر لا + ب \quad .....(۴)$$

اس میں ایک اختیاری مستقل ما کے ساتھ بطور اضافہ کے شریک ہے۔ یہ بات ابتدا ہی سے ظاہر تھی کیونکہ ما کی بجائے (ما + ج) لکھنے سے مساوات (۱) میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔

(ب) اگر متبوع متغیر صریحاً موجود نہ ہو تو مساوات ذیل کی صورت کی ہوگی ۴۱۹

$$فہ \left(\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} ، \frac{فر ما}{فر لا} ، ما \right) = ۰ \quad ...(۵)$$

اور دفعہ ۱۶۳ (۳) کے مطابق

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} \text{ ، } \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

لکھنے سے حاصل ہوگا

$$\text{فہ}\left(\text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} \text{ ، ع ، ما}\right) = ۰ \quad \ldots\ldots (۷)$$

جو ع اور ما میں پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔ اگر اس کا حل ذیل کی شکل میں لکھا جا سکے

$$\text{ع} = \text{ف}(\text{ما ، ا}) \quad \ldots\ldots (۸)$$

تو دوسرے تکمل سے حاصل ہوگا

$$\int \frac{\text{فرما}}{\text{ف}(\text{ما ، ا})} = \text{لا} + \text{ب} \quad \ldots\ldots (۹)$$

یہاں بھی مساوات (۵) کی شکل سے نتیجہ نکالا جا سکتا تھا کہ ایک اختیاری مستقل لا کے ساتھ بطور اضافہ کے شریک ہوگا۔

مثال (۱) $(۱ - \text{لا}^2) \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} - \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۰)$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{۱}{\text{ع}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}}{۱ - \text{لا}^2}$$

اس لئے $\text{لوک ع} = -\frac{۱}{۲} \text{لوک} (۱ - \text{لا}^2) + \text{مستقل}$

یا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$

اسلئے $\text{ما} = \text{ا جب}^{-1} \text{لا} + \text{ب} \quad \ldots\ldots (۱۲)$

مثال (۲) تجاذب کے نظریہ میں مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\text{ق}}{\text{فرر}^2} + \frac{۲}{\text{ر}} \frac{\text{فرق}}{\text{فرر}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

اکثر نمود وار ہوتی ہے، $\frac{فرق}{فرر}$ کو تابع متغیر ماننے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\frac{فر^{۲}ق}{فرر^{۲}}}{\frac{فرق}{فرر}} + \frac{۲}{ر} = ۰ \quad \cdots\cdots\cdots (۱۴)$$

اس لئے $لوک \frac{فرق}{فرر} + ۲ لوک ر = مستقل$

یا

$$\frac{فرق}{فرر} = \frac{۱}{ر^{۲}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۵)$$

۴۲۰

دوبارہ تکمیل کرنے سے

$$ق = -\frac{۱}{ر} + ب \quad \cdots\cdots\cdots (۱۶)$$

مثال (۳) ایسے منحنی دریافت کرو جن کا نصف قطر انحنا ء عماد کے مساوی ہے لیکن منحنی کے دوسرے جانب واقع ہے۔

دفعات ۶۰ اور ۱۳۵ کے دیکھنے سے ظاہر ہے کہ مذکورۂ بالا شرط سے ذیل کی مساوات حاصل ہوگی

$$\frac{\left\{۱ + \left(\frac{فرما}{فرا}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{فر^{۲}ما}{فرا^{۲}}} = ما \left\{۱ + \left(\frac{فرما}{فرا}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

مختصر کرکے ابدال (۶) کے استعمال سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ع}{۱+ع^{۲}} \frac{فرع}{فرما} = \frac{۱}{ما} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۸)$$

اس لئے $\frac{۱}{۲} لوک (۱ + ع^{۲}) = لوک ما + مستقل$

اس لئے $\text{۱} + \text{ع}^2 = \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ج}^2}$ .... (۱۹)

جہاں ج^2 اختیاری مستقل کے طور پر لیا گیا ہے کیونکہ یہ لازماً مثبت ہے۔

اس لئے $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ع} = \pm \dfrac{\sqrt{\text{ما}^2 - \text{ج}^2}}{\text{ج}}$ .... (۲۰)

متغیروں کو جدا کرنے سے

$$\frac{\text{فر ما}}{\sqrt{\text{ما}^2 - \text{ج}^2}} = \pm \frac{\text{فر لا}}{\text{ج}}$$

$\text{جمز}^{-1} \dfrac{\text{ما}}{\text{ج}} = \pm \dfrac{\text{لا} - \text{عا}}{\text{ج}}$ .... (۲۱)

جہاں عا دوسرا اختیاری مستقل ہے۔

پس $\text{ما} = \text{ج جمز} \dfrac{\text{لا} - \text{عا}}{\text{ج}}$ .... (۲۲)

جو زنجیرہ کے قبیل کو ظاہر کرتا ہے۔ دفعہ ۱۳۴ مثال (۱) دیکھو۔

۱۶۶ — دوسرے رتبہ کی خطی مساوات۔

ایسی تفرقی مساوات جس میں تابع متغیر اور اس کے پہلے دو مشتقوں کی صرف پہلی قوتیں موجود ہوں اور انکا کوئی حاصل ضرب موجود نہ ہو دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات کہلاتی ہے لہٰذا دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات یہ ہوگی

$\dfrac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف} \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = \text{ر}$ .... (۱)

جہاں ف، ق اور ر متغیر لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔

چند اہم خواص تمام خطی مساواتوں میں مشترک ہیں۔ ہم دوسرے رتبہ کی مساوات کے لئے انکے ثبوت دینگے لیکن عمل سے ظاہر ہوگا

کہ عام شکل کے لئے بھی اس کی توسیع بآسانی ہو سکتی ہے۔

(آ) مساوات (۱) کا مکمل حل

$$\text{ما} = \text{ع} + \text{ط} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں (ط) ایسا تفاعل ہے کہ یہ مساوات (۱) کی موجودہ صورت کو پورا کرتا ہے اور (ع) مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = ۰ \quad \ldots (۳)$$

کا عام حل ہے جہاں مساوات (۳) مساوات (۱) کے بائیں جانب کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اب اس مفروضہ کی بنا پر کہ ما = ع + ط جہاں ط مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے اور ع دریافت طلب ہے مساوات (۱) میں اندراج سے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ق ع} + \frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ط}}{\text{فر لا}} + \text{ق ط} = \text{ر}$$

اور چونکہ مفروض سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ط}}{\text{فر لا}} + \text{ق ط} = \text{ر} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اس لئے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ق ع} = ۰ \quad (۵)$$

یعنی تفاعل ع مساوات (۳) کو پورا کرتا ہے۔

مساوات (۱) کے مکمل حل کے دو حصے ط اور ع کو بالترتیب "خاص تکملہ" اور "متمم تفاعل" کہتے ہیں۔ یہ واضح رہے کہ خاص تکملہ ابتدائی تفرقی مساوات کا کوئی حل ہے اور جتنا سادہ ہو بہتر ہوگا۔ برخلاف اس کے متمم تفاعل مساوات (۳) کا عام سے عام حل ہے اور اس لئے اس میں دو اختیاری مستقل شریک ہونگے۔

(۲) اگر ی۱، ی۲ مساوات (۳) کے کوئی دو حل ہوں تو

$$\text{ما} = \text{ج}_1\,\text{ی}_1 + \text{ج}_2\,\text{ی}_2 \quad \ldots\ldots (6)$$

مساوات کو پورا کرے گا۔ اس میں ج۱ اور ج۲ اختیاری مستقل ہیں۔ مساوات میں درج کرنے سے بآسانی اس امر کی تصدیق ہوسکتی ہے لہذا اگر تفاعل ی۱ اور ی۲ ایک دوسرے کے تابع نہ ہوں یعنی ایک تفاعل دوسرے کا مستقل ضعف نہ ہو تو ضابطہ (۶) سے مساوات (۳) کا ایسا حل حاصل ہوتا ہے جس میں دو اختیاری مستقل موجود ہیں۔

(۳) اگر مساوات (۳) کا کوئی خاص تکملہ (و) معلوم ہو تو ابدال ما = و ی سے مساوات (۱) $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ میں پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے اور اس لئے مساوات (۱) کا مکمل حل اس پہلے رتبہ کی مساوات کے مکمل حل پر آکے منحصر ہوتا ہے۔ کیونکہ مساوات (۱) ہو جاتی ہے۔

$$\text{و}\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2} + \left(2\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ف و}\right)\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \left(\frac{\text{فر}^2\text{و}}{\text{فرلا}^2} + \text{ف}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ق و}\right)\text{ی} = \text{ر}$$

۴۲۲

جو مفروضہ کی بنا پر

$$\text{و}\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2} + \left(2\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ف و}\right)\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ر} \quad \ldots\ldots (8)$$

میں تحویل ہو جاتی ہے۔ یہ تابع متغیر $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ میں پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ بالخصوص اگر ر = ۰ تو

$$\frac{\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2}}{\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}} + \frac{2}{\text{و}}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ف} = 0 \quad (9)$$

اس لئے $\text{لوک}\ \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + ۲\ \text{لوک و} + \int \text{ف فرلا} = \text{مستقل}$

یا $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{و}^۲}\ \text{قو}^{-\int \text{ف فرلا}}$ .... (۱۰)

پس $\text{ی} = ۱ \int \frac{۱}{\text{و}^۲}\ \text{قو}^{-\int \text{ف فرلا}}\ \text{فرلا} + \text{ب}$ ...... (۱۱)

اور اس لئے (۳) کا مکمل حل ہے

$\text{ما} = ۱\ \text{و} \int \frac{۱}{\text{و}^۲}\ \text{قو}^{-\int \text{ف فرلا}}\ \text{فرلا} + \text{ب و}$ ..... (۱۲)

اب خطی مساواتوں کو مختلف ترکیبوں سے تکمیل کرنے کی چند مثالیں دیجاتی ہیں۔ سلسلوں میں تکمیل کرنے کے طریقوں پر چودھویں باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال (۱) آواز کے نظریہ میں اور طبیعیاتی ریاضی کی دیگر شاخوں میں ذیل کی مساوات اکثر واقع ہوتی ہے

$\frac{\text{فر}^۲\ \text{فما}}{\text{فر ر}^۲} + \frac{۲}{\text{ر}}\ \frac{\text{فر فما}}{\text{فر ر}} + \text{ک}^۲\ \text{فما} = ۰$ ...... (۱۳)

اگر اسے ر سے ضرب دیں تو یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$\frac{\text{فر}^۲}{\text{فر ر}^۲}(\text{ر فما}) + \text{ک}^۲(\text{ر فما}) = ۰$ ... (۱۴)

اس لئے دفعہ ۱۶۳ کی رو سے

$\text{ر فما} = \text{ا جم}(\text{ک ر}) + \text{ب جب}(\text{ک ر})$

یا $\text{فما} = \frac{\text{ا جم}(\text{ک ر}) + \text{ب جب}(\text{ک ر})}{\text{ر}}$ ... (۱۵)

مثال (۲) $(۱ - \text{لا}^۲)\ \frac{\text{فر}^۲\ \text{ما}}{\text{فرلا}^۲} - \text{لا}\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$ (۱۶)

۴۲

ظاہر ہے کہ ما = لا اسکا ایک خاص حل ہے۔
اس لئے ما = لا ی رکھنے سے

(۱۷)

$$لا(۱-لا^۲)\frac{ف^۲ی}{فلا^۲}+(۲-۳لا^۲)\frac{فی}{فلا}=۰ \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

اب متغیروں کو جدا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\frac{ف^۲ی}{فلا^۲}}{\frac{فی}{فلا}}+\frac{۲}{لا}-\frac{لا}{۱-لا^۲}=۰ \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

اس لئے

$$\frac{فی}{فلا}=\frac{ا}{لا^۲\sqrt{۱-لا^۲}} \quad \ldots\ldots (۲۰)$$

اور

$$ی=-\frac{ا\sqrt{۱-لا^۲}}{لا}+ب \quad \ldots\ldots (۲۱)$$

اس لئے (۱۶) کا مکمل حل ہے

$$ما=ا\sqrt{۱-لا^۲}+ب لا \quad \ldots\ldots (۲۲)$$

مثال (۳)

$$(۱+لا^۲)\frac{ف^۲ما}{فلا^۲}+۳لا\frac{فما}{فلا}+ما=۰ \quad (۲۳)$$

اتفاق سے یہ "ٹھیک" مساوات ہے۔ یعنی دایاں رکن، لا، ما، $\frac{فما}{فلا}$ کے ایک تفاعل کا ٹھیک تفرقی سر ہے، کیونکہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

$$\left\{(۱+لا^۲)\frac{ف^۲ما}{فلا^۲}+۲لا\frac{فما}{فلا}\right\}+\left\{لا\frac{فما}{فلا}+ما\right\}=۰$$

پس اس کا تکملہ ہے

$$(۱+لا^۲)\frac{فما}{فلا}+لا ما=ا \quad \ldots\ldots (۲۴)$$

یہ پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ اور ظاہر ہے کہ اس کا مکمل جزو ضربی

$\frac{1}{\sqrt{1+لا^2}}$ ہے۔ اس لئے

$$\frac{فر}{فرلا}\left\{\sqrt{1+لا^2} \times ما\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+لا^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1+لا^2} \times ما = \text{اجیب}^{-1} لا + ب \quad \cdots\cdots (25)$$

امثلہ ۵۵

(۱) $لا \frac{فر^2 ما}{فرلا^2} = 1$ $[ما = لا \text{ لوک} لا + الا + ب]$

(۲) $\frac{فر^2 ما}{فرلا^2} = لا \text{ قو}^{لا}$ $[ما = (لا - 2)\text{قو}^{لا} + الا + ب]$

(۳) $لا^2 \frac{فر^2 ما}{فرلا^2} = ا$ $[ما = ا \text{ لوک} \frac{1}{لا} + الا + ب]$

۴۲۴

(۴) ایک افقی سلاخ پر صرف اس کا وزن اور اس کے ٹیکوں کے دباؤ عمل کر رہے ہیں سلاخ کے انصراف کے لئے تفرقی مساوات یہ ہے

$$ب \frac{فر^4 ما}{فرلا^4} = و$$

جہاں 'و' وزن فی اکائی طول ہے۔

و کو مستقل مانکر اس مساوات کو تکمل کرو اور مستقلات کو ذیل کے شرائط کے تحت دریافت کرو

$ما = \frac{فر^2 ما}{فرلا^2} = 0$ جبکہ $لا = 0$ اور نیز جبکہ $لا = ل$

[یہ صورت (ل) طول والی یکساں سلاخ میں پیدا ہوگی جو سروں پر ٹکی ہوئی ہے]

[ب ما = ۱/۲۴ و لا (ل − لا) (ل² + ل لا − لا²)]

(۵) مذکورۂ بالا سوال کو ذیل کے شرائط کے ماتحت حل کرو

ما = فر ما / فر لا = ۰ جبکہ لا = ۰ اور نیز لا = ل

[یہ صورت ایک سلاخ کی ہے جو دونوں سروں پر جکڑی ہوئی ہے]

[ب ما = ۱/۲۴ و لا² (ل − لا)²]

(۶) سوال (۴) کی مساوات کو ذیل کے شرائط کے ماتحت حل کرو

لا = ۰ کے لئے ما = فر ما / فر لا = ۰ اور لا = ل کے لئے فر² ما / فر لا² = فر³ ما / فر لا³ = ۰

[یہ صورت ایسی سلاخ کی ہے جسکا ایک سرا جکڑا ہوا ہے اور دوسرا آزاد ہے]

[ب ما = ۱/۲۴ و لا² (۶ ل² − ۴ ل لا + لا²)]

(۷) مساوات فر² لا / فر ت² = − م لا + ف کو حل کرو اور حل کی طبیعی تعبیر بتاؤ۔

[لا = ف / م + ج جم (√م ت + ص)]

(۸) ایک ذرہ کی خطی حرکت کی تفرقی مساوات جس پر فاصلہ کے متناسب قوتِ اندفاع عمل کر رہی ہے فر² لا / فر ت² = م لا ہے۔ ثابت کرو کہ اسکا حل ذیل کی تین شکلوں میں سے کوئی ایک ہے اور نتیجوں کا طبیعی تعبیر بتاؤ

لا = ا جمز (√م ت + ص)، لا = ا جبز (√م ت + ص)، لا = ا ق^(±√م ت + ص)

(۹) ایک ذرہ حالت سکون سے فاصلہ (ا) سے قوت کے مرکز کی طرف حرکت کرتا ہے۔ کشش کا اسراع مساوی ہے م (فاصلہ)⁻³ کے۔ ثابت کرو کہ مرکز تک گرنے کا وقت ا² / √م ہے۔

(۱۰) مرکزی مدار کی عام تفرقی مساوات

$\frac{فر^2 ع}{فر طہ^2} + ع = \frac{ف}{ھ^2 ع^2}$ ہے جہاں ف، ع کا معلومہ تفاعل ہے۔
اس کا پہلا تکمل دریافت کرو۔

$$\left[\left(\frac{فر ع}{فر طہ}\right)^2 + ع^2 = 2 \int \frac{ف}{ھ^2 ع^2} فر ع + ج \right]$$

(۱۱) مساوات $\frac{فر^2 ر}{فر ت^2} = \frac{مہ}{ر^3}$ کو حل کرو اور ثابت کرو کہ حل مماثل ہے

$$ر^2 = ا + 2 ب ت + ج ت^2$$

جہاں مستقلات ا، ب اور ج میں ذیل کا ربط ہے

$$ا ج - ب^2 = مہ$$

۴۲۵

(۱۲) $ا \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = \frac{فر ما}{فر لا}$ $\left[ما = ا + ب فو^{\frac{لا}{ا}} \right]$

(۱۳) $2 ا \frac{فر ما}{فر لا} \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = 1$ $\left[ا (ما - بہ)^2 = \frac{4}{9} (لا - عہ)^3 \right]$

(۱۴) $ا \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2 = 0$ $\left[ما = ا لوگ \frac{لا - عہ}{بہ} \right]$

(۱۵) $ا \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = \left[1 + \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ $\left[ما - بہ = ا جمز \frac{لا - عہ}{ا} \right]$

(۱۶) $\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2 + 1 = 0$ $\left[ما = بہ + لوگ جم (لا - عہ) \right]$

(۱۷) $\frac{فر^4 ما}{فر لا^4} = \frac{فر^2 ما}{فر لا^2}$ $\left[ما = ا + ب لا + ج فو^{لا} + د فو^{-لا} \right]$

(۱۸) $\frac{فر^4 ما}{فر لا^4} + \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = 0$ $\left[ما = ا + ب لا + ج جم لا + د جب لا \right]$

(۱۹) $\frac{\text{فر}^2 \text{ق}}{\text{فر} \text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{فر ق}}{\text{فر ر}} = 0$ $[\text{ق} = \text{ا لوک ر} + \text{ب}]$

(۲۰) $\text{لا}\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ $[\text{ما} = \text{ا لا}^2 + \text{ب}]$

(۲۱) $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ما}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ $[\text{ما} = 2\,\text{ب مس ب}(\text{ا} - \text{عد لا})]$

(۲۲) $(1+\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} + 1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 = 0$

$\left[\text{ما} = \text{ب} + \left(1 + \frac{1}{\text{عد}^2}\right)\text{لوک}(1 + \text{عد لا}) - \frac{\text{لا}}{\text{عد}}\right]$

(۲۳) $(1+\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ $[\text{ما} = \text{ا} + \text{ب جذ}^{-1}\text{لا}]$

(۲۴) $(\text{لا}^2-1)\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ $[\text{ما} = \text{ا} + \text{ب جمذ}^{-1}\text{لا}]$

(۲۵) $(1+\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} + 2\,\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ $[\text{ما} = \text{ا مس}^{-1}\text{لا} + \text{ب}]$

(۲۶) $(1-\text{ما})\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} + 2\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right) = 0$ $\left[\text{ما} = \frac{\text{لا} + \text{ا}}{\text{لا} + \text{ب}}\right]$

(۲۷) $\text{ما}\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} = 2\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2$ $\left[\text{ما} = \frac{1}{\text{لا} + \text{ب}}\right]$

(۲۸) $\text{ما}\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} = 1 - \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2$ $[\text{ما}^2 = \text{لا}^2 + \text{ا لا} + \text{ب}]$

(۲۹) $(1-\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} - \text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 2$

$[\text{ما} = (\text{جب}^{-1}\text{لا})^2 + \text{ا جب}^{-1}\text{لا} + \text{ب}]$

(۳۰) $\frac{فر}{فرلا}\left\{(۱-لا^۲)\frac{فرع}{فرلا}\right\}=۰$ [ع = ا + ب مسن^{-۱} لا]

(۳۱) $\frac{فر}{فرمہ}\left\{(۱-مہ^۲)\frac{فرع}{فرمہ}\right\}+۲مہ=۰$

[ع = ا مہ + ب (۱ - مہ مسن^{-۱} مہ)]

(۳۲) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نصف قطر انحنا عماد کے مساوی ہے اور یہ دونوں منحنی کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔

[دائرے $(لا-عہ)^۲+ما^۲=بہ^۲$]

(۳۳) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نصف قطر انحنا، عماد کا دو چند ہے اور یہ دونوں منحنی کے مخالف جانب واقع ہیں۔

[مکافی $(لا-عہ)^۲=۴بہ(ما-بہ)$]

(۳۴) ایسے منحنی دریافت کرو کہ ما محور پر نصف قطر انحنا کا ظل مستقل ل کے مساوی ہے۔ [ما = بہ لوک قوط $\frac{لا-عہ}{ل}$]

(۳۵) ایسے منحنی دریافت کرو جنکا نصف قطر انحنا، عماد کے مکعب کے متناسب ہے

[مخروطی تراشیں جنھیں لا محور، محور تقاطع ہے]

(۳۶) $(۱+لا)\frac{فر^۲ما}{فرلا^۲}+لا\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^۲=\frac{فرما}{فرلا}$

[ما = بہ + لوک $(لا^۲-عہ^۲)-\frac{۱}{عہ}$ لوک $\left(\frac{لا+عہ}{لا-عہ}\right)$]

(۳۷) $(۱-لا^۲)\frac{فر^۲ما}{فرلا^۲}-\frac{۱}{لا}\frac{فرما}{فرلا}+لا^۲=۰$

[ما = ا + ب $\sqrt{۱-لا^۲}+\frac{۱}{۲}لا^۲$]

(۳۸) $\frac{فر^۲ما}{فرلا^۲}+ف\frac{فرما}{فرلا}+\frac{فرف}{فرلا}ما=۰$

$$\left[\text{ما} = \text{فو}^{-\int \text{ف}\,\text{فرلا}}\left(\text{ا}\int \text{فو}^{\int \text{ف}\,\text{فرلا}}\,\text{فرلا} + \text{ب}\right)\right]$$

(۳۹) $$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \frac{2}{\text{لا}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = 0 \qquad \left[\text{ما} = \frac{\text{ا}\,\text{فو}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{فو}^{-\text{لا}}}{\text{لا}}\right]$$

(۴۰) $$(1+\text{لا}^{2})\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - 2\,\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + 2\,\text{ما} = 0$$

$$\left[\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,(1 - \text{لا}^{2})\right]$$

(۴۱) $$(1+\text{لا}^{2})\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} \qquad \left[\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\sqrt{1+\text{لا}^{2}}\right]$$

(۴۲) مساوات $(\text{لا}^{2}-1)\dfrac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - 2\,\text{لا}\,\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + 2\,\text{ما} = 0$ کو حل کرو
اس کا ایک حل $\text{ما} = \text{لا}$ معلوم ہے۔ $\left[\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,(\text{لا}^{2}+1)\right]$

(۴۳) مساوات $\text{لا}\,\dfrac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - (\text{ن} - \text{لا})\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ن}\,\text{ما} = 0$ کو حل کرو
جبکہ ایک حل $\text{ما} = \text{فو}^{-\text{لا}}$ ہے۔ $\left[\text{ما} = \text{ا}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + \text{ب}\,\text{فو}^{-\text{لا}}\int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{\text{لا}}\,\text{فرلا}\right]$

(۴۴) مساوات $(\text{لا}^{2}-1)\dfrac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{لا}\,\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = 0$ میں ابدال
$\text{ی} = \text{جم}^{-1}\,\text{لا}$ سے متبوع متغیر کو (ی) میں تبدیل کرو اور اسکو حل کرو۔
$\left[\text{ما} = \text{ا}\,\text{جم}\,\text{ی} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{ی}\right]$

(۴۵) $$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + 2\,\text{ن}\,\text{مم}\,(\text{ن}\,\text{لا})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (\text{م}^{2} - \text{ن}^{2})\,\text{ما} = 0$$

$$\left[\text{ما} = \frac{\text{ا}\,\text{جم}\,\text{م}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{م}\,\text{لا}}{\text{جب}\,\text{ن}\,\text{لا}}\right]$$

(۴۶) $$(1-\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}-3\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}-\text{ما}=0$$

$$\left[\text{ما}=\frac{\text{ا جب}^{-1}\text{لا}+\text{ب}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}\right]$$

(۴۷) $$\text{لا}^2\,\text{ما}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}+\left(\text{ما}-\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2=0 \qquad \left[\text{ما}^2=\text{ا لا}+\text{ب لا}^2\right]$$

(۴۸) $$\text{لا ما}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}+\text{لا}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2-\text{ما}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}=0 \qquad \left[\text{ما}^2=\text{ا لا}^2+\text{ب}\right]$$

(۴۹) $$3\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}\times\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فر لا}^4}=5\left(\frac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فر لا}^3}\right)^2$$

$$\left[(\text{ما}-\text{ا لا}-\text{ب})^2=\text{ج لا}+\text{د}\right]$$

(۵۰) $$2\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\times\frac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فر لا}^3}=3\left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}\right)^2$$

$$\left[\text{ما}=\text{ا}+\frac{\text{ب}}{\text{لا}+\text{ج}}\right]$$

تیرہواں باب

مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۴۲۸

۱۶۷۔ دوسرے رتبہ کی مساواتیں۔ متمم تفاعل۔

مستقل سروں والی خطی مساواتیں ریاضی طبیعیات میں اس کثرت سے واقع ہوتی ہیں کہ ان پر تفصیل سے غور کرنا مناسب ہوگا۔ اس تحقیق میں تابع متغیر لا کے لحاظ سے عامل عف یا $\frac{فر}{فرلا}$ کی چند خاصیتوں کو استعمال کرنے سے بہت سہولت پیدا ہوتی ہے۔

دفعہ ۲۹ میں ثابت کر دیا گیا ہے کہ عف کا عمل تقسیمی ہے یعنی اگر ع اور و متغیر لا کے تفاعل ہوں تو

عف(ع + و) = عف ع + عف و .... (۱)

نیز اگر ا مستقل ہو تو

(عف + ا) ع = عف ع + ا ع = ا ع + عف ع = (ا + عف) ع ... (۲)

اور عف (ا ع) = ا $\frac{فرع}{فرلا}$ = ا عف ع .... (۳)

اس لئے عف مستقل ضعف کی شرکت میں قانون تبادلہ کے تابع ہے۔ علاوہ ازیں عف قوت نمائی قانون کے بھی تابع ہے یعنی

عف^{م} عف^{ن} ع = عف$^{م+ن}$ ع .... (۴)

پس عامل عف بذات خود اور مستقل ضعف کے ساتھ معمولی جبر و مقابلہ کے اساسی قوانین کو مانتا ہے۔ اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ جبر و مقابلہ کے وہ نتائج جو اوپر کے قوانین سے حاصل ہوتے ہیں موجودہ اطلاق کے لئے بھی درست ہونگے بشرطیکہ عف کی رقوم میں انکے کوئی معنی موجود ہوں بطور مثال اگر لہ_1، لہ_2 مستقل ہوں تو

$$(\text{عف}-\text{لہ}_1)(\text{عف}-\text{لہ}_2)\,\text{ع} = (\text{عف}-\text{لہ}_1)\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}-\text{لہ}_2\,\text{ع}\right)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}-\text{لہ}_2\,\text{ع}\right)-\text{لہ}_1\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}-\text{لہ}_2\,\text{ع}\right)$$

$$= \frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2}-(\text{لہ}_1+\text{لہ}_2)\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}+\text{لہ}_1\text{لہ}_2\,\text{ع}$$

$$= [\text{عف}^2-(\text{لہ}_1+\text{لہ}_2)\,\text{عف}+\text{لہ}_1\text{لہ}_2]\,\text{ع} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

۴۲۹

اب ہم دوسرے رتبہ کی مساوات پر غور کرینگے۔ یہ مساوات حرکیاتی سوالات میں اکثر نمودار ہوتی ہے۔

منتظم تفاعل دریافت کرنیکے لئے ذیل کے نمونے کی مساوات کو حل کرنا ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}+\text{ا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ب}\,\text{ما}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

یعنی

$$(\text{عف}^2+\text{ا}\,\text{عف}+\text{ب})\,\text{ما}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

اگر $\frac{1}{4}\text{ا}^2 > \text{ب}$ تو اس کے معادل ہے

$$(\text{عف}-\text{لہ}_1)(\text{عف}-\text{لہ}_2)\,\text{ما}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

جہاں لہ_1، لہ_2 مساوات $\text{لہ}^2+\text{ا}\,\text{لہ}+\text{ب}=0$ کی اصلیں ہیں۔

یعنی

$$\text{لہ}_1،\ \text{لہ}_2 = -\frac{1}{2}\text{ا} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\text{ا}^2-\text{ب}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

اگر لکھیں

$$(\text{عف}-\text{لہ}_2)\,\text{ما}=\text{ی} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

تو مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

(عف-لم₁) ی = ۰ . . . . (۱۲)

جو پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے، دفعہ (۱۵۰) سے اس کا حل ہے

ی = أ قو^(لم₁لا) . . . . (۱۳)

اور نتیجہ (۱۱) میں درج کرنے سے

(عف - لم₂) ما = أ قو^(لم₁لا) . . . . (۱۴)

اس لئے دفعہ (۱۵۷) (آ) سے

ما = ج₁ قو^(لم₁لا) + ج₂ قو^(لم₂لا) . . . . (۱۵)

جہاں ج₁ = أ / (لم₁ - لم₂)

چونکہ أ ایک اختیاری مستقل ہے اس لئے ج₁، ج₂ بھی اختیاری مستقل ہونگے۔ اور عمل سے ظاہر ہے کہ (۱۵) مساوات (۲) کا عام سے عام حل ہے۔

اگر ¼ ا₁² = ب تو مساوات (۹) کی لم میں اصلیں مساوی ہیں اور (۱۴) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

(عف - لم) ما = أ قو^(لم لا) . . . . (۱۶)

اس کا عام حل دفعہ ۱۵۷ (۲) کے مطابق ہے

ما = (أ لا + ب) قو^(لم لا) . . . . (۱۷)

اگر ¼ ا₁² < ب سے تو (۹) کو پورا کرنے والی لم₁، لم₂ کی قیمتیں خیالی ہیں تاہم مذکورۂ بالا طریقہ سے مساوات (۲) کا ایسا علامتی حل دریافت

کر سکتے ہیں جس میں $\sqrt{-1}$ موجود ہو۔
اس سوال پر کہ ایسے حل کو کیا معنی دئے جائیں یہاں غور کرنے کی چنداں ضرورت نہیں ہے کیونکہ ذیل کے طریقہ پر ہم اس مشکل سے بچ سکتے ہیں

۴۲۰ اگر $ما = فو^{م لا} \times ی$ (۱۸) . . . .

لکھیں جہاں م ابھی غیر معین ہے تو

$$عف\ ما = فو^{م لا} (عف + م) ی،$$

$$عف^2\ ما = فو^{م لا} (عف^2 + ۲ م\ عف + م^2) ی \quad . . . . (۱۹)$$

اس لئے تفرقی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\{عف^2 + (۲م + ا) عف + م^2 + ا م + ب\} ی = ۰ \quad (۲۰)$$

اب اگر $م = -\frac{1}{۲} ا$ رکھیں تو یہ دفعہ ۱۶۳ (۸) کی شکل میں تحویل ہو جاتا ہے

$$\frac{د^2 ی}{د لا^2} + (ب - \frac{1}{۴} ا^2) ی = ۰ \quad (۲۱)$$

اگر $ب > \frac{1}{۴} ا^2$ تو دفعہ ۱۶۳ میں دکھایا گیا ہے کہ اس کا حل ہے

$$ی = ا\ جم\ بہ لا + ب\ جب\ بہ لا \quad . . . . . (۲۲)$$

$$جہاں\ بہ = \sqrt{ب - \frac{1}{۴} ا^2} \quad . . . . (۲۳)$$

پس موجودہ صورت میں مساوات (۶) کا حل ہے

$$ما = فو^{-\frac{1}{۲} ا لا} (ا\ جم\ بہ لا + ب\ جب\ بہ لا) \quad . . . . (۲۴)$$

یہ اسکے معادل ہے $ما = ج\ فو^{-\frac{1}{۲} ا لا} \times جم (بہ لا + صہ)$ . . . . . (۲۵)

اس میں ج اور صہ اختیاری مستقل ہیں۔ مذکورۂ بالا نتائج کو ذیل کی شکل میں اکٹھا کر سکتے ہیں۔

(و) اگر $\frac{1}{4}$ ا^2 > ب تو (۶) کا حل ہوگا

ما = ج$_1$ قو$^{لما_1 لا}$ + ج$_2$ قو$^{لما_2 لا}$ جہاں لما$_1$، لما$_2$ مساوات

لما^2 + ا لما + ب = ۰ کی اصلیں ہیں۔

(ب) اگر $\frac{ا^2}{4}$ = ب تو حل ہوگا

ما = (ا لا + ب) قو$^{-\frac{1}{2} ا لا}$

(ج) اگر $\frac{1}{4}$ ا^2 < ب تو حل ہوگا

ما = قو$^{-\frac{1}{2} ا لا}$ × (ا جتم بہ لا + ب جب بہ لا)

جہاں بہ^2 = ب - $\frac{1}{4}$ ا^2

مثال (۱) $\frac{فر^2 ما}{فر لا^2}$ + $\frac{فر ما}{فر لا}$ - ۶ ما = ۰ . . . . (۲۶)

لما میں مساوات لما^2 + لما - ۶ = ۰ ہوگی۔

اس سے لما = ۲ اور - ۳

پس ما = ا قو$^{2 لا}$ + ب قو$^{-3 لا}$ . . . . (۲۷)

مثال (۲) $\frac{فر^2 ما}{فر لا^2}$ + ۴ $\frac{فر ما}{فر لا}$ + ۴ ما = ۰

لما میں مساوات (لما + ۲)^2 = ۰ ہوگی

اس کی دوہری اصل (- ۲) ہے۔

اس لئے ما = (ا لا + ب) قو$^{-2 لا}$ . . . . (۲۸)

مثال (۳) رقاص کی آزاد اہتزازی حرکت ایسے واسطے میں جس کی مزاحمت رفتار کے

متناسب ہے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{ف}^2\,\text{لا}}{\text{فت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{ف لا}}{\text{فت}} + \text{مں}\,\text{لا} = 0 \quad \ldots \ (۲۹)$$

جہاں ک رگڑ کی قدر ہے۔ یہی مساوات روپیما کی سوئی کی حرکت کو بھی ظاہر کرتی ہے جبکہ اس پر ہوا کی لزوجیت کا اور اس امالی رو کا برق مقناطیسی عمل ہورہا ہو جو سوئی کی حرکت سے پاس کی دھات کی اشیا میں پیدا ہوتی ہے۔

مختلف ترقیم کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات (۲۹) کا حل جبکہ رگڑ کی قدر ایک خاص مقدار سے کم ہے یہ ہے

$$\text{لا} = \text{ج}\ \text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}} \times \text{جم}(\text{ن}_1\text{ت} + \text{صہ}) \quad \ldots\ldots \ (۳۰)$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ن}_1 = \sqrt{\text{مں} - \frac{1}{4}\text{ک}^2} \quad \ldots\ldots \ (۳۱)$$

نتیجہ (۳۰) سے جو حرکت تعبیر ہوتی ہے اسے ایسی سادہ موسیقی حرکت خیال کیا جاسکتا ہے جسکا دور $\frac{2\pi}{\text{ن}_1}$ ہے اور جس کا حیطہ قانون $\text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}$ کے مطابق متقارباً صفر تک کم ہوتا ہے۔ حل (۳۰) میں یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ $\text{ک}^2 < 4\,\text{مں}$۔ اگر $\text{ک}^2 > 4\,\text{مں}$ تو مناسب حل یہ ہوگا

$$\text{لا} = \text{ا}\ \text{قو}^{\text{لم}_1\text{ت}} + \text{ب}\ \text{قو}^{\text{لم}_2\text{ت}} \quad \ldots\ldots \ (۳۲)$$

جہاں لم_1، لم_2 مساوات $\text{لم}^2 + \text{ک}\,\text{لم} + \text{مں} = 0$ (۳۳)

کی اصلیں ہیں۔ مفروضہ کی بنا پر یہ اصلیں حقیقی ہیں اور چونکہ ان کا حاصل ضرب (مں) مثبت ہے اس لئے یہ ایک ہی علامت کی ہونگی۔ نیز چونکہ ان کا حاصل جمع (-ک) منفی ہے اس لئے دونوں اصلیں منفی ہونگی۔ اس لئے ہٹاؤ لا زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ صفر قیمت اختیار کرنے کے بعد، متقارباً صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔ یہ صورت سست گام روپیما میں یا بہت زیادہ لزج مایع میں حرکت کرنے والے رقاص میں نمودار ہوتی ہے۔

انتہائی صورت میں جبکہ $\text{ک}^2 = 4\,\text{مں}$

$$لا = (ا + ب ت) \, قو^{-\frac{1}{2} ک ت} \quad .... (۳۴)$$

پہلا جزو ضربی، مطلق قیمت کے لحاظ سے ت کے ساتھ ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور دوسرا گھٹتا ہے۔ لیکن چونکہ دوسرے جزو ضربی کا گھٹاؤ پہلے کے بڑھاؤ سے زیادہ تیز ہے اس لئے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت ت ← ∞ کے لئے صفر ہے دفعہ ۴۳ (۲) دیکھو۔

۱۶۸ — خاص تکملہ کی تعیین —

اب ہم مستقل سروں والی، دوسرے رتبہ کی خطی مساوات کا خاص تکملہ دریافت کرینگے جبکہ مساوات کا بایاں جانب بھی وجود رکھتا ہو۔

پس (عف^۲ + ا عف + ب) ما = ر .... (۱)

جہاں ر متغیر لا کا ایک معلومہ تفاعل ہے۔

جیسے اوپر بیان ہو چکا ہے اس کا کوئی بھی خاص تکملہ، خواہ کسی طرح دریافت ہوا ہو، حل کے لئے کافی ہوگا۔

پس خاص تکملہ میں سے ایسی رقموں کو نظر انداز کر سکتے ہیں جو متمم تفاعل میں واقع ہوتی ہیں کیونکہ یہ مساوات (۱) کے دائیں جانب میں کسی رقم کا اضافہ نہیں کرینگی۔ برعکس اس کے ضرورت کے لحاظ سے ہم خاص تکملہ میں متمم تفاعل کی کتنی بھی رقمیں جمع کر سکتے ہیں۔ ۴۳۲

نیز اگر ر رقموں کا مجموعہ ہو تو ما کی وہ قیمتیں دریافت کرنی ہیں جنکو مساوات (۱) کی دائیں جانب میں درج کرنے سے بائیں جانب کی مختلف رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔ خاص تکملہ ما کی ان قیمتوں کا مجموعہ ہوگا یہاں صرف نہایت کارآمد صورتوں پر غور کرنا کافی ہوگا۔

(آ) اگر ر میں اس نمونہ ح قو$^{عما لا}$ .... (۲)

کی رقم موجود ہو تو خاص تکملہ میں متناظر رقم ہوگی

$$ما = \frac{ح}{عم^2 + ا\,عم + ب} \times فو^{عم\,لا} \quad \ldots\ldots (۳)$$

کیونکہ اگر (۳) کی بائیں جانب پر عامل (عف² + ا عف + ب) سے عمل کریں تو (۲) حاصل ہوتا ہے۔

یہ ضابطہ ناکام رہتا ہے اگر عم² + ا عم + ب = ۰۔

یعنی اگر $فو^{عم\,لا}$ متمم تفاعل کی ایک رقم ہو۔

پچھلے دفعہ کی ترقیم میں فرض کرو کہ عم = لم۱ یعنی ذیل کی مساوات کو حل کرنا ہے

$$(عف - لم_۱)(عف - لم_۲)\,ما = ح\,فو^{لم_۱\,لا} \quad \ldots\ldots (۴)$$

$$اگر \quad (عف - لم_۲)\,ما = ی \quad \ldots\ldots (۵)$$

لکھیں تو اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(عف - لم_۱)\,ی = ح\,فو^{لم_۱\,لا} \quad \ldots\ldots (۶)$$

دفعہ ۱۵۷ (۲) میں یہ بتایا گیا ہے کہ (۶) کا خاص تکملہ ہے

$$ی = ح\,لا\,فو^{لم_۱\,لا} \quad \ldots\ldots (۷)$$

اب صرف مساوات $(عف - لم_۲)\,ما = ح\,لا\,فو^{لم_۱\,لا} \quad \ldots\ldots (۸)$

کا حل مطلوب ہے۔ اس کا تکمیل جزو ضربی $فو^{-لم_۲\,لا}$ ہے

$$اس\ لئے \quad عف(ما\,فو^{-لم_۲\,لا}) = ح\,لا\,فو^{(لم_۱ - لم_۲)\,لا} \quad \ldots\ldots (۹)$$

بائیں جانب کو بالحصص تکمیل کرنے سے اور متمم تفاعل میں جو رقمیں حاصل ہو چکی ہیں انکو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ما فو^{(لم_1 - لم_2) لا} = \frac{ح}{لم_1 - لم_2} \times لا فو^{(لم_1 - لم_2) لا}$$

یعنی $ما = \frac{ح}{لم_1 - لم_2} لا فو^{لم_1 لا}$ .... (۱۰)

۴۲۲ اگر $لم$ مساوات $عف^2 + ا عف + ب = 0$ کی دوہری اصل ہو تو مزید ترمیم کی ضرورت ہے۔

اب حل طلب مساوات اس شکل کی ہے

$(عف - لم)^2 ما = ح فو^{لم لا}$ .... (۱۱)

عمل کا پہلا قدم وہی ہے لیکن اب بجائے (۸) کے مساوات ہے

$(عف - لم) ما = ح لا فو^{لم لا}$ .... (۱۲)

دفعہ ۱۵۷ (۳) میں دریافت کیا گیا تھا کہ اس کا خاص تکملہ ہے

$ما = \frac{1}{2} ح لا^2 فو^{لم لا}$ .... (۱۳)

نتائج کی صورتیں ایک دفعہ قائم کر دینے کے بعد، طالب علم اس میں بہت سہولت پائیگا کہ حسب موقع

$ما = م فو^{عم لا}$، $ما = م لا فو^{عم لا}$ یا $ما = م لا^2 فو^{عم لا}$، .... (۱۴)

میں سے مناسب حل کو فرض کرے اور مساوات

$(عف^2 + ا عف + ب) ما = ح فو^{عم لا}$ .... (۱۵)

میں درج کر کے م کی قیمت دریافت کرے۔

دفعہ ۱۶۹ میں جو ضابطے دئے جائینگے اِن کی وجہ سے عمل میں بہت آسانی واقع ہو گی۔

(۲) اگر س میں ح جم عہلا + ک جب عہلا ..... (۱۶)
کے نمونہ کی رقم موجود ہو تو فرض کرو کہ

ما = ا جم عہلا + ب جب عہلا ...... (۱۸)

مساوات (۱) میں درج کرنے سے دائیں جانب مساوی ہے

(- عہ² ا + ا عہ ب + ب ا) جم عہلا

+ (- عہ² ب - ا عہ ا + ب ب) جب عہلا

کے۔ پس جملہ (۱۶) کی رقوم پیدا ہونگی بشرطیکہ

(- عہ² + ب) ا + ا عہ ب = ح، - ا عہ ا + (- عہ² + ب) ب = ک

.... (۱۹)

سوائے اُس خاص صورت کے جبکہ ا = ۰، عہ² = ب (جس پر ابھی غور کیا جائیگا) ان مساوات سے ا، ب دریافت ہو سکتے ہیں۔

پس ا = ((- عہ² + ب) ح - ا عہ ک) / ((عہ² - ب)² + ا² عہ²)، ب = (ا عہ ح + (- عہ² + ب) ک) / ((عہ² - ب)² + ا² عہ²)

.... (۱۹)

اگر تفرقی مساوات میں سر (ا) صفر ہے تو مذکورۂ بالا نتائج میں اختصار ہو سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ مساوات

فر² ما / فر لا² + ب ما = ح جم عہلا + ک جب عہلا .... (۲۰)

کا خاص تکملہ ہوگا

ما = ح / (ب - عہ²) جم عہلا + ک / (ب - عہ²) جب عہلا ... (۲۱)

لیکن اگر عہ² = ب تو حل میں مشکل پیدا ہوتی ہے۔ اس صورت میں حل کی مناسب شکل کے لئے فرض کرو کہ

ما = و جم عہلا + و جب عہلا .... (۲۲)

اس کو درج کرنے سے

۴۳۴ $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{عـ}^2\text{ما} = (2\,\text{عـ عف و} + \text{عـ}^2\text{عف ع})\ \text{جم عـ لا}$

$+ (-2\,\text{عـ عف ع} + \text{عـ}^2\text{عف و})\ \text{جب عـ لا}$ .... (۲۳)

پس اس صورت میں مساوات (۲۰) پوری ہوگی بشرطیکہ

$\text{عف ع} = -\frac{\text{ک}}{2\,\text{عـ}}$ ، $\text{عف و} = \frac{\text{ح}}{2\,\text{عـ}}$

یعنی $\text{ع} = -\frac{\text{ک لا}}{2\,\text{عـ}}$ ، $\text{و} = \frac{\text{ح لا}}{2\,\text{عـ}}$ .... (۲۴)

اسلئے خاص تکملہ ہے $\text{ما} = \frac{\text{ح}}{2\,\text{عـ}}\,\text{لا جب عـ لا} - \frac{\text{ک}}{2\,\text{عـ}}\,\text{لا جم عـ لا}$ ... (۲۵)

مثال (۱) $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} - 6\,\text{ما} = \text{قو}^{3\text{لا}} + \text{قو}^{-3\text{لا}}$ .... (۲۶)

دفعہ ۱۶۷ مثال (۱) کے مطابق اسکا متمم تفاعل ہے

$\text{ما} = \text{ا قو}^{2\text{لا}} + \text{ب قو}^{-3\text{لا}}$

اگر فرض کیا جائے کہ $\text{ما} = \text{م قو}^{3\text{لا}}$ تو مساوات (۲۶) کے دائیں جانب میں درج کرنے سے بائیں جانب کی پہلی رقم حاصل ہوتی ہے بشرطیکہ $\text{م} = \frac{1}{6}$ ، بائیں جانب کی دوسری رقم مذکورۂ بالا مستثنیٰ صورتوں میں سے ہے کیونکہ (۳-) جبریہ مساوات $\text{لم}^2 + \text{لم} - 6 = 0$ کی اصل ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ $\text{ما} = \text{م لا قو}^{-3\text{لا}}$ تو درج کرنے پر زیر غور دوسری رقم حاصل ہوتی ہے بشرطیکہ $\text{م} = -\frac{1}{5}$

اسلئے (۲۶) کا مکمل حل ہے

$\text{ما} = \text{ا قو}^{2\text{لا}} + \text{ب قو}^{-3\text{لا}} + \frac{1}{6}\,\text{قو}^{3\text{لا}} - \frac{1}{5}\,\text{لا قو}^{-3\text{لا}}$ ..... (۲۷)

مثال (۲) $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + 4\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} + 4\,\text{ما} = \text{قو}^{2\text{لا}} + \text{قو}^{-2\text{لا}}$ .... (۲۸)

دفعہ ۱۶۷ مثال (۲) میں تتمہ تفاعل دریافت کیا گیا ہے اور وہ یہ ہے

ما = (ا لا + ب) قو^{-۲لا}

بائیں جانب کی پہلی رقم حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ ما = د قو^{۲لا} اور اس سے حاصل ہوگا مر = ۱/۱۶ ، دوسری رقم لہائیں مساوات کی دوہری اصل کے جواب پڑیں ہے اسلئے ما = مر لا^۲ قو^{-۲لا} فرض کرنے سے حاصل ہوگا مر = ۱/۲

اس لئے (۲۸) کا مکمل حل ہے

ما = (ا لا + ب) قو^{-۲لا} + ۱/۱۶ قو^{۲لا} + ۱/۲ لا^۲ قو^{-۲لا} ...... (۲۹)

مثال (۳) مساوات

فر^۲لا/فرت^۲ + ک فرلا/فرت + مہ لا = ف جم (پ ت + صہ) ... (۳۰)

کا خاص تکملہ دریافت کرو۔

یہ رقاص کی حرکت کی مساوات ہے جبکہ اس پر مزاحمت رفتار کے متناسب عمل کر رہی ہے اور قوت، وقت کا سادہ موسیقی تفاعل ہے۔

فرض کرو کہ لا = ا جم (پ ت + صہ) + ب جب (پ ت + صہ)

(۳۱) ....

اسکو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

- پ^۲ ا + ک پ ب + مہ ا = ف
- پ^۲ ب - ک پ ا + مہ ب = ۰ } .... (۳۲)

اس لئے ا = (مہ - پ^۲) ف / ((مہ - پ^۲)^۲ + ک^۲ پ^۲) ، ب = ک پ ف / ((مہ - پ^۲)^۲ + ک^۲ پ^۲)

(۳۳) ....

اگر رکھیں ا = ر جم صم ، ب = ر جب صم .... (۳۴)

۴۳۵

(۲) سا (عف) کے انہیں معنوں کے مطابق اگر ع^لا کا کوئی تفاعل ہو تو

سا (عف) فو^{لا لا} ع = فو^{لا لا} سا (عف + لا) ع ۔۔۔۔۔۔ (۵)

کیونکہ ترتیب وار حاصل ہوتا ہے

عف فو^{لا لا} ع = فو^{لا لا} (عف + لا) ع

عف^۲ فو^{لا لا} ع = عف {فو^{لا لا} (عف + لا) ع}

= فو^{لا لا} (عف + لا) (عف + لا) ع

= فو^{لا لا} (عف + لا)^۲ ع

اور اسی طرح عام طور پر

عف^ن فو^{لا لا} ع = فو^{لا لا} (عف + لا)^ن ع

پس عالی سا (عف) کی مختلف رقموں سے نتیجہ (۵) کی متناظر رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۳) اگر سا (عف) میں عف کی صرف جفت قوتیں ہوں تو اسے فا (عف^۲) سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۶۴ سے معلوم ہے کہ اگر

ع = ا جم عا لا + ب جب عا لا ۔۔۔۔۔۔ (۶)

تو عف^۲ ع = - عا^۲ ع

اور اسلئے فا (عف^۲) ع = فا (- عا^۲) ع ۔۔۔۔۔۔ (۷)

۱۷۰ – مستقل سروں والی عام تفرقی مساوات متمم تفاعل۔

مساوات ف (عف) ما = ۔۔۔ (۱)

کا عام حل دریافت کرنا ہے۔

۴۳۴

اب اگر ف (عف) دو منطق صحیح اجزائے ضربی میں تحویل ہو سکتا ہے

یعنی ف (عف) ≡ فا (عف) سا (عف) ...... (۲)

تو ظاہر ہے کہ سا (عف) ما = ۰ ...... (۳)

کا کوئی حل مساوات (۱) کو پورا کریگا۔

نیز چونکہ اجزاء مبادلہ پذیر ہیں اس لئے

فا (عف) ما = ۰ ...... (۴)

کا کوئی حل بھی مساوات کو پورا کرے گا۔ پس (۳) اور (۴) کے حل کا مجموعہ (۱) کو پورا کریگا۔ دیگر اجزاء میں تحلیل کرنے سے ظاہر ہے کہ اگر

ف (عف) ≡ فا (عف) × فا (عف) × فا (عف) ... (۵)

تو مساوات (۱) ذیل کی مساواتوں کے مختلف حل کے مجموعہ سے پوری ہوگی

فا (عف) ما = ۰، فا (عف) ما = ۰، فا (عف) ما = ۰ (۶)

جبرو مقابلہ کے ایک ضابطہ کی بناء پر (جسکا ذکر دفعہ ۸۵ میں ہو چکا ہے) تفاعل ف (عف) ہمیشہ پہلے اور دوسرے درجے کے حقیقی اجزاء میں تحویل ہو سکتا ہے بشرطیکہ اس کے سر حقیقی ہوں۔ نیز ان مختلف اجزاء کے درجوں کا مجموعہ تفاعل کے درجے (مثلاً ن) کے مساوی ہوگا۔ علاوہ اس کے پہلے درجہ کے اجزاء ذیل کی شکل کے ہونگے

عف۔ لا، عف۔ لا، عف۔ لا ......

جہاں لا، لا، لا ... ، ف (لا) = ۰ (۷)

کی حقیقی اصلیں ہیں اگر لا، مساوات (۷) کی اکہری اصل ہے تو نظام (۶) میں سے ایک مساوات ذیل کے نمونہ کی ہوگی

(عف۔ لا) ما = ۰ ...... (۸)

اس کا حل ہے ما = ج ھو^لاﻻ ...... (۹)

اب اگر (۷) کی تمام اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہوں یعنی لا، لا ... لان تو

اگر اس میں رکھیں

ما = قو^(- ½ ا لا) ی اور بہا^٢ = ب - ¼ ا^٢ . . . . (١٥)

تو دفعہ ١٦٩ (٥) سے

(عف^٢ + ا عف + ب) ما = {(عف + ½ ا)^٢ + بہا^٢} قو^(- ½ ا لا) ی

= قو^(- ½ ا لا) {عف^٢ + بہا^٢} ی

اور چونکہ (عف^٢ + بہا^٢) ی = ٠ کا حل ی = گ₁ جم بہا لا + گ₂ جب بہا لا

ہے اسلئے ما = قو^(- ½ ا لا) (گ₁ جم بہا لا + گ₂ جب بہا لا) . . . . (١٦)

اور یہ نتیجہ دفعہ ١٦٧ (٢٣) کے مطابق ہے۔ پس ف (عف) کے ہر ایک ناقابل تحویل دو درجی جزو ضربی کے جواب میں دو اختیاری مستقلوں والا حل حاصل ہوتا ہے۔

بالآخر اگر ف (عف) میں ایسے ناقابل تحویل دو درجی جملے ہیں جو ر مرتبہ واقع ہوتے ہیں تو مساوات

(عف^٢ + ا عف + ب)^ر ما = ٠ . . . . . . (١٧)

کو حل کرنا ہوگا۔ ابدال (١٥) کو پھر استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(عف^٢ + بہا^٢)^ر ی = ٠ . . . . (١٨)

اس کا حل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

ی = ع جم بہا لا + و جب بہا لا . . . . . . (١٩)

اب تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(عف^٢ + بہا^٢) ع جم بہا لا = ٢ بہا (عف ع) جم (بہا لا + ½ π) + ...

(عف^٢ + بہا^٢)^٢ ع جم بہا لا = (٢ بہا)^٢ (عف^٢ ع) جم (بہا لا + π) + ...

اور عام طور پر

(عفا² + با²)ˢ و جم با لا = (۲ با)ˢ (عفاˢ و) جم (با لا + $\frac{\pi s}{2}$) ...(۲۰)

اسمیں ع کے کم سے کم رتبہ والے مشتق کی رقم کو لکھا گیا ہے۔

اسی طرح

(عفا² + با²)ˢ و جب با لا = (۲ با)ˢ (عفاˢ و) جب (با لا + $\frac{\pi s}{2}$) ...(۲۱)

پس رشتہ (۱۹) مساوات (۱۸) کو پورا کریگا بشرطیکہ

عفاˢ ع = ۰، عفاˢ و = ۰ ...(۲۲)

یعنی ع = ھ۰ + ھ۱ لا + ھ۲ لا² + ... + ھ(س-۱) لا^(س-۱)

اور و = گ۰ + گ۱ لا + گ۲ لا² + ... + گ(س-۱) لا^(س-۱) ...(۲۳)

اس لئے مساوات (۱۷) کا مکمل حل جس میں ۲ س اختیاری مستقل ہیں یہ ہوگا

ما = (ھ۰ + ھ۱ لا + ھ۲ لا² + ... + ھ(س-۱) لا^(س-۱)) قو^(-ا لا/۲) جم با لا

+ (گ۰ + گ۱ لا + گ۲ لا² + ... + گ(س-۱) لا^(س-۱)) قو^(-ا لا/۲) جب با لا ...(۲۴)

مثال (۱) $\frac{\text{فر}^۳ \text{ما}}{\text{فر لا}^۳} = \frac{\text{فر}^۲ \text{ما}}{\text{فر لا}^۲}$ ...(۲۵)

اسکو عفا² (عفا - ۱) ما = ۰ کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

اور اسلئے اسکا مکمل حل مساوات عفا² ما = ۰، (عفا - ۱) ما = ۰ کے حل کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

پس ما = ا + ب لا + ج قو^لا ...(۲۶)

مثال (۲) $\frac{\text{فر}^۴ \text{ما}}{\text{فر لا}^۴}$ = م⁴ ما ...(۲۷)

اس کو ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں

(عفا - م) (عفا + م) (عفا² + م²) ما = ۰

پس مساواتوں (عف - م) ما = ۰ (عف + م) ما = ۰ (عف۲ + م۲) ما = ۰
کے حلوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ما = ا قو^(م لا) + ب قو^(-م لا) + ھ جم م لا + گ جب م لا .... (۲۸)

مثال (۳) فر۴ ما / فر لا۴ + فر۲ ما / فر لا۲ + ما = ۰ .... (۲۹)

یہ معادل ہے (عف۲ + عف + ۱) (عف۲ - عف + ۱) ما = ۰ کے۔

اس لئے ما = قو^(لا/۲) (ا جم √۳/۲ لا + ب جب √۳/۲ لا)

+ قو^(-لا/۲) (اَ جم √۳/۲ لا + بَ جب √۳/۲ لا) ... (۳۰)

مثال (۴) فر۴ ما / فر لا۴ + ۲ م۲ فر۲ ما / فر لا۲ + م۴ ما = ۰ (۳۱) ۴۴۰

اس کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں

(عف۲ + م۲)۲ ما = ۰

اسلئے ما = (ھ + ھ۱ لا) جم م لا + (گ + گ۱ لا) جب م لا .... (۳۲)

۱۷۱ — خاص تکملہ

اب ہم مساوات ف (عف) ما = ر .... (۱)
کے خاص تکملہ کی ذیل کی دو اہم صورتوں پر غور کرینگے۔

(آ) اگر ر میں ح قو^(عم لا) .... (۲)
کے نمونے کی ایک رقم شریک ہے تو خاص تکملہ کی متناظر رقم ہوگی

ما = ح / ف(عم) قو^(عم لا) .... (۳)

کیونکہ دفعہ ۱۶۹ (۴) سے

$$\text{ف}(\text{عف})\,\text{ما} = \frac{\text{ح}}{\text{ف}(\text{عما})}\,\text{ف}(\text{عف})\,\text{فو}^{\text{عما لا}} = \text{ح}\,\text{فو}^{\text{عما لا}}$$

لیکن اگر عما مساوات $\text{ف}(\text{عف}) = 0$ ...... (۴)

کی اصل ہو تو یہ ضابطہ صحیح نہیں رہتا۔

اگر یہ اکہری اصل ہو تو لکھ سکتے ہیں

$$\text{ف}(\text{عف}) \equiv \text{فا}(\text{عف})(\text{عف} - \text{عما}) \quad \ldots\ldots (۵)$$

جہاں $\text{فا}(\text{عف})$ میں $\text{عف} - \text{عما}$ بطور جزو ضربی کے شریک نہیں ہے

اب مساوات $\text{فا}(\text{عف})(\text{عف} - \text{عما})\,\text{ما} = \text{ح}\,\text{فو}^{\text{عما لا}}$ پوری ہوگی

بشرطیکہ $(\text{عف} - \text{عما})\,\text{ما} = \frac{\text{ح}}{\text{فا}(\text{عما})}\,\text{فو}^{\text{عما لا}}$ پوری ہو۔

دفعہ ۱۵۷ (۲) میں ثابت کیا گیا ہے کہ اسکا خاص تکملہ ہے

$$\text{ما} = \frac{\text{ح}}{\text{فا}(\text{عما})}\,\text{لا}\,\text{فو}^{\text{عما لا}} \quad \ldots\ldots (٦)$$

اگر عما مساوات (۴) کی ر' رتبہ کی اصل ہو تو لکھ سکتے ہیں

$$\text{ف}(\text{عف}) \equiv \text{فا}(\text{عف})(\text{عف} - \text{عما})^{\text{ر}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

جہاں $\text{فا}(\text{عف})$ میں $(\text{عف} - \text{عما})$ بطور جزو ضربی کے شریک نہیں ہے

پس مساوات $\text{فا}(\text{عف})(\text{عف} - \text{عما})^{\text{ر}}\,\text{ما} = \text{ح}\,\text{فو}^{\text{عما لا}}$ ...... (۹)

۴۴۱ پوری ہوگی بشرطیکہ $(\text{عف} - \text{عما})^{\text{ر}}\,\text{ما} = \frac{\text{ح}\,\text{فو}^{\text{عما لا}}}{\text{فا}(\text{عما})}$ پوری ہو۔

اب اگر $\text{ما} = \text{فو}^{\text{عما لا}} \times \text{ی}$ درج کریں تو دفعہ ۱۶۹ (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{عف} - \text{عما})^{\text{ر}}\,\text{ما} = \text{فو}^{\text{عما لا}}\,\text{عف}^{\text{ر}}\,\text{ی}$$

یہ ضابطہ بیکار ہو جاتا ہے اگر فما (- عما) = یعنی جبکہ فما (عف٢ میں عفا٢ + عما٢ بطور جزو ضربی کے شریک ہے۔ اس صورت میں (۱۱) کے نمونے کی رقمیں متمم تفاعل میں موجود ہونگی۔

اگر جزو ضربی (عفا٢ + عما٢) صرف ایک مرتبہ واقع ہو تو لکھ سکتے ہیں

فما (عفا٢) = سما (عفا٢) (عفا٢ + عما٢) ...... (۱۶)

اب مساوات

سما (عفا٢) (عفا٢ + عما٢) ما = ح جم عما لا + ک جب عما لا ... (۱۷)

پوری ہوگی بشرطیکہ

(عفا٢ + عما٢) ما = ح / سما (- عما٢) جم عما لا + ک / سما (- عما٢) جب عما لا ... (۱۸)

لہٰذا یہ سوال دفعہ ۱۲۸ (۲) کی حل شدہ صورت میں تحویل ہو جاتا ہے۔ پس خاص تکملہ ہوگا

ما = ح / ۲ عما سما (- عما٢) لا جب عما لا - ک / ۲ عما سما (- عما٢) لا جم عما لا

...... (۱۹)

اگر فما (عفا٢) میں (عفا٢ + عما٢) بطور جزو ضربی ر مرتبہ شریک ہو تو

فما (عفا٢) = سما (عفا٢) (عفا٢ + عما٢)^ر ...... (۲۰)

اور زیر غور سوال ذیل کی مساوات کے خاص تکملہ دریافت کرنے میں تحویل ہو جاتا ہے

(عفا٢ + عما٢)^ر ما = ح / سما (- عما٢) جم عما لا + ک / سما (- عما٢) جب عما لا ....(۲۱)

اگر فرض کیا جائے کہ

ما = و جم (عما لا - ر π/۲) + و جب (عما لا - ر π/۲) ...... (۲۲)*

*[یہ مفروضہ ما = و جم عما لا + و جب عما لا بھی اتنا ہی کارگر ہوگا لیکن اوپر کے مضمون میں مختلف شکل اس وجہ سے ضبط کی گئی ہے کہ اسکی مدد سے آخری نتیجہ نہایت برجستہ شکل میں لکھا جا سکتا ہے]

تو دفعہ ۱۷۰ (۲۰)، (۲۱) سے

(عف۲ + عما)ن ما = (۲ عما)ن × عفن ع × جم عما لا + (۲ عما)ن × عفن و × جب عما لا + ...

پس مساوات (۲۱) پوری ہوگی بشرطیکہ

عفن ع = ح / ((۲ عما)ن سا(- عما۲))، عفن و = ک / ((۲ عما)ن سا(- عما۲)) ...(۲۳)

یعنی ع = ح لان / (لن (۲ عما)ن سا(- عما۲))، و = ک لان / (لن (۲ عما)ن سا(- عما۲)) ...(۲۴)

اس لئے خاص تکملہ ہوگا

ما = لان / (لن (۲ عما)ن سا(- عما۲)) {ح جم (عما لا - نπ/۲) + ک جب (عما لا - نπ/۲)}

...(۲۵)

عام صورت میں ف(عف) اور عف کی جفت اور طاق قوتیں دونوں موجود ہوتی ہیں اور اسی طرح سفر وضی (۱۴) کا اگر نہیں ہوتا جبکہ ف(عف) میں عف۲ + عما۲ بطور جزو ضربی کے شریک ہے۔ اس لئے لکھو

ف(عف) = سا(عف) (عف۲ + عما۲)ن ...(۲۶)

جہاں سا(عف) میں (عف۲ + عما۲) بطور جزو ضربی شریک نہیں ہے۔ سب سے پہلے مساوات

سا(عف) ما = ح جم عما لا + ک جب عما لا ...(۲۷)

کا خاص تکملہ ذیل کی شکل میں حاصل ہوتا ہے

ما = ح، جم عما لا + ک، جب عما لا ...(۲۸)

اب صرف یہ مساوات حل کرنا باقی ہے

(عف۲ + عما۲)ن ما = ح، جم عما لا + ک، جب عما لا ...(۲۹)

اور اس پر اوپر غور ہو چکا ہے۔

(۳) ایک اور صورت جس کا خاص تکملہ دریافت ہو سکتا ہے وہ ہے

ف(عف) ما = لا ...(۳۰)

۴۴۳

درجے کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اگر $م_1$، $م_2$ اسکی اصلیں ہوں تو حل ہوگا

$$ما = مہ_1 لا^{م_1} + مہ_2 لا^{م_2} \quad ....(۵)$$

نیز مساوات $لا^2 \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + ل لا \frac{فر ما}{فر لا} + ب ما = ح لا^{پ} \quad ....(۶)$

کا خاص تکملہ

$$ما = ک لا^{پ} \quad ....(۷)$$

ہوگا بشرطیکہ

$$\{پ(پ-1) + ل پ + ب\} ک = ح \quad ....(۸)$$

۴۴

اگر م میں مساوات کی اصلیں خیالی ہوں یا مساوی ہوں تو مشکلات پیدا ہوتی ہیں۔

نیز اگر ر میں $لا^{پ}$ کے نمونے کی رقم شریک ہے جبکہ م میں مساوات کی ایک اصل پ ہے تو خاص تکملہ کے دریافت کرنے میں مزید مشکلات پیدا ہوتی ہیں۔ ہر صورت میں خاص تحقیقات سے بچنے کے لئے ہم ثابت کرینگے کہ متبوع متغیر کو بدلنے سے مساوات (۱) مستقل سروں والی خطی تفرقی مساوات میں ہمیشہ تحویل کی جاسکتی ہے۔

اگر رکھیں $لا = قو^{طا}$ ....(۹)

تو لا کے کسی تفاعل ع کے لئے

$$\frac{فر ع}{فر لا} = \frac{فر ع}{فر طا} \div \frac{فر لا}{فر طا} = قو^{-طا} \frac{فر ع}{فر طا}$$

یعنی $لا \frac{فر ع}{فر لا} = \frac{فر ع}{فر طا} \quad ....(۱۰)$

ہم عامل $\frac{فر}{فر طا}$ کو (جو $لا \frac{فر}{فر لا}$ کے معادل ثابت کیا گیا ہے) طا سے ظاہر کرینگے۔

اب حسب معمول $\frac{ف}{فر لا}$ کے لئے عف استعمال کرنے سے

$$لا\, عف (لا^م\, عف^م\, ع) = لا^{م+۱}\, عف^{م+۱}\, ع + م\, لا^م\, عف^م\, ع$$

یعنی $لا^{م+۱}\, عف^{م+۱}\, ع = (لا\, عف - م)(لا^م\, عف^م\, ع) = (طا - م)(لا^م\, عف^م\, ع)$ .... (۱۱)

اس ضابطہ میں م = ۰، ۱، ۲ ...... رکھنے سے

لا عف ع، $لا^۲\, عف^۲\, ع$، $لا^۳\, عف^۳\, ع$، $لا^۴\, عف^۴\, ع$ ......

بالترتیب طا ع، $طا^۲\, ع$، $طا^۳\, ع$ ...... کے رقوم میں ظاہر کئے جا سکتے ہیں

اب چونکہ عامل $طا = \frac{ف}{فر طا}$ کا عمل مبادلہ پذیر ہے اس لئے

$$لا\, عف\, ع = طا\, ع$$

$$لا^۲\, عف^۲\, ع = طا(طا - ۱)ع$$

$$لا^۳\, عف^۳\, ع = طا(طا - ۱)(طا - ۲)ع$$

اور اسی طرح عام ضابطہ ہے

$$لا^ن\, عف^ن\, ع = طا(طا - ۱)(طا - ۲) ...... (طا - ن + ۱)ع$$ ...... (۱۲)

اب اگر مساوات (۱) کی مختلف رقموں میں ضابطہ (۱۲) سے حاصل شدہ قیمتیں درج کی جائیں تو ما اور طا میں مستقل سروں والی خطی مساوات ذیل کے نمونے کی حاصل ہوتی ہے

$$ف(طا)\, ما = س \text{ یا } ف\left(\frac{ف}{فر طا}\right) ما = س$$ ...... (۱۳)

مثال (۱) $\frac{فر^۲ ق}{فر ر^۲} + \frac{۲}{ر}\, \frac{فر ق}{فر ر} = ۰$ ...... (۱۴)

اگر مساوات کو $ر^۲$ سے ضرب دیا جائے تو یہ (۱) کی شکل اختیار کرتی ہے

پس $ر^۲ \frac{فر^۲ ق}{فر ر^۲} + ۲ر \frac{فر ق}{فر ر} = ۰$ ...... (۱۵)

۴۴۵

فرض کرو کہ $ق = ج ر^م$

مساوات میں درج کرنے سے $م(م-۱) + ۲م = ۰$ یعنی $م(م+۱) = ۰$ حاصل ہوتا ہے

پس م کی قابل قبول قیمتیں صفر اور −۱ ہیں اور اس لئے حل ہوگا

$$ق = ا + \frac{ب}{ر} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

دفعہ ۱۶۵ مثال (۲) دیکھو۔

مثال (۲) $لا^۲ \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + ۲ لا \frac{فر ما}{فر لا} - ۲ ما = لا^۲ \quad \ldots\ldots (۱۷)$

تتمہ تفاعل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ $ما = ج لا^م$

تو $م(م-۱) + ۲م - ۲ = ۰$ یعنی $(م-۱)(م+۲) = ۰$

اس لئے $م = ۱، -۲$

نیز $ما = ج لا^۲$ خاص تکملہ ہوگا بشرطیکہ $(۲-۱)(۲+۲) ج = ۱$ یا $ج = \frac{۱}{۴}$

$$\text{اس لئے} \quad ما = ا لا + \frac{ب}{لا^۲} + \frac{۱}{۴} لا^۲ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

مثال (۳) $لا^۲ \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - لا \frac{فر ما}{فر لا} + ما = لا \quad \ldots\ldots\ldots (۱۹)$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\{ط(ط-۱) - ط + ۱\} ما = قو^{طہ}$$

$$\text{یا} \quad (ط-۱)^۲ ما = قو^{طہ}$$

مختلف ترقیم کا خیال کرتے ہوئے دفعہ ۱۶۷ سے اس کا حل ہوگا

$$ما = (ا + ب طہ) قو^{طہ} + \frac{۱}{۲} طہ^۲ قو^{طہ}$$

یعنی لا کی رقوم میں

$$ما = (ا + ب لوک لا) لا + \frac{۱}{۲} لا (لوک لا)^۲ \quad \ldots\ldots (۲۰)$$

مثال (۴)۔ $لا^{۲} \frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} + لا \frac{فر ما}{فر لا} + ما = لا^{۳}$ ...... (۲۱)

اس لئے $(طا^{۲} + ۱)\ ما = قو^{۳طا}$

پس $ما = ا\ جم\ طا + ب\ جب\ طا + \frac{قو^{۳طا}}{۱۰}$

$= ا\ جم\ (لوک\ لا) + ب\ جب\ (لوک\ لا) + \frac{۱}{۱۰} \times لا^{۳}$ ... (۲۲)

۱۷۳۔ ہمزاد تفرقی مساواتیں۔

حرکیات اور دیگر مضامین کے سوالات میں اکثر ہمزاد تفرقی مساواتوں کے ایسے نظاموں سے واسطہ پڑتا ہے جنمیں ایک متبوع متغیر کے دو یا زیادہ تفاعل اور ان کے تفرقی سر موجود ہوتے ہیں۔ لیکن ہمیشہ مساواتوں کی تعداد تابع متغیروں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

ہم تابع متغیروں کو حروف لا، ما .... سے اور متبوع متغیر کو ت سے ظاہر کریںگے۔

عام نظریہ کے مسائل پر غور کرنے کی بجائے یہاں چند مثالیں دے دینا کافی ہوگا جن سے عام طور پر کثیر الاستعمال طریقوں کی توضیح ہوگی۔

اول یہ ممکن ہے کہ ہر ایک دی ہوئی مساوات میں صرف ایک تابع متغیر موجود ہو اور اس لئے ان پر علیحدہ علیحدہ غور ہوسکتا ہو۔ ۲۲۶

مثال (۱)۔ جاذبہ ارض کے زیر عمل مرمی کی صورت میں اگر لا اور ما محور افقی اور محور انتصابی ہوں تو

$\frac{فر^{۲} لا}{فر ت^{۲}} = ۰$ ، $\frac{فر^{۲} ما}{فر ت^{۲}} = -ج$ .... (۱)

پس $لا = ا + اَ\ ت$ ، $ما = ب + بَ\ ت - \frac{۱}{۲} ج\ ت^{۲}$ ..... (۲)

اختیاری مستقلوں ا، اَ، ب، بَ سے مقام اور رفتار کے بارے میں چار ابتدائی شرائط پوری ہوسکتی ہیں۔

مثال (۲)۔ ایک ذرہ کی صورت میں، جس پر ایک ثابت مرکز (مبدأ) سے فاصلے کے متناسب، قوت کشش عمل کر رہی ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{مم لا} ،\quad \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = -\text{مم ما} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس لئے $\text{لا} = \text{ا}_1\,\text{جم}\sqrt{\text{مم}}\,\text{ت} + \text{ا}_2\,\text{جب}\sqrt{\text{مم}}\,\text{ت}$ ،

$$\text{ما} = \text{ب}_1\,\text{جم}\sqrt{\text{مم}}\,\text{ت} + \text{ب}_2\,\text{جب}\sqrt{\text{مم}}\,\text{ت}$$

ان میں سے ت کو ساقط کرنے سے

$$(\text{ب}_2\,\text{لا} - \text{ا}_2\,\text{ما})^2 + (\text{ب}_1\,\text{لا} - \text{ا}_1\,\text{ما})^2 = (\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1)^2 \quad \ldots (۴)$$

اس سے ظاہر ہے کہ حرکت کا طریق قطع ناقص ہے۔

اگر دی ہوئی مساواتیں جو تعداد میں ن ہیں اس سادہ نمونے کی نہ ہوں تو تفرق اور جبریہ عمل کی مدد سے تمام تابع متغیروں لا، ما، ی، ...... کو سوائے ایک متغیر (مثلاً لا کے) ساقط کیا جا سکتا ہے۔ محصلہ مساوات کو حل کرنے کے بعد اگر لا کی عام قیمت، مساواتوں کے ابتدائی نظام میں درج کی جائے تو معلوم ہوگا کہ نظام میں (ن −۱) مساواتیں باقی رہ جاتی ہیں جن میں (ن −۱) تابع متغیر ما، ی، ...... شریک ہیں۔ اس عمل کو بار بار دہرایا جا سکتا ہے حتیٰ کہ ہر ایک تابع متغیر ت اور اختیاری مستقلوں کی رقوم میں بیان ہو جائے۔ خاص صورتوں میں زیادہ مختصر عمل استعمال ہو سکتا ہے۔ ہم طبعی سوالات کی چند مثالوں پر اکتفا کریں گے۔

مثال (۳)۔ اگر مبدأ کے گرد زاوی رفتار ن سے گھومنے والے مستوی کے کسی ایک نقطے کے محدد لا، ما ہوں

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} = -\text{ن ما} ،\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فرت}} = \text{ن لا} \quad \ldots\ldots (۵)$$

ما کو ساقط کرنے سے $\dfrac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ن}\,\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فرت}} = -\text{ن}^2\,\text{لا}$

اسلئے $ﻻ = اجم (ن ت + صہ)$ .... (۶)

جہاں ا اور صہ اختیاری مستقل ہیں ۔

(۵) کی پہلی مساوات میں ﻻ کی اس قیمت کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$ما = اجب (ن ت + صہ)$ .... (۷)

نتیجوں (۶) اور (۷) سے ظاہر ہے کہ ہر نقطہ مبدا کے گرد زاوی رفتار ن سے دائرے بناتا ہے ۔

مثال (۴):- برقی، مقناطیسی امالہ کے نظریہ میں ذیل کی مساواتیں نمودار ہوتی ہیں

$$\left.\begin{aligned} ل \frac{فرﻻ}{فرت} + م \frac{فرما}{فرت} + ر ﻻ = ق \\ م \frac{فرﻻ}{فرت} + ن \frac{فرما}{فرت} + س ما = ف \end{aligned}\right\} \quad (۸)$$

یہاں ﻻ، ما باہم متاثر دو دوروں میں برقی روؤں کو ظاہر کرتے ہیں ۔ ر اور س دوروں کی مزاحمتیں ہیں، ل اور ن ذاتی امالوں کی شرحیں، م باہمی امالہ کی شرح، اور ق، ف بیرونی محرکہ برقی قوتیں ہیں ۔

اول فرض کرو کہ ق = ۰، ف = ۰، تب

$ﻻ = ا \, قو^{لہ ت}$، $ما = ب \, قو^{لہ ت}$ .... (۹)

سے مساواتیں (۸) پوری ہونگی بشرطیکہ

$$\left.\begin{aligned} (ل لہ + ر) ا + م لہ ب = ۰ \\ م لہ ا + (ن لہ + س) ب = ۰ \end{aligned}\right\} \quad (۱۰)$$

ان میں سے نسبت ا : ب کو ساقط کرنے سے

$(ل لہ + ر)(ن لہ + س) - م^۲ لہ^۲ = ۰$

یعنی $(ل ن - م^۲) لہ^۲ + (ل س + ن ر) لہ + ر س = ۰$ (۱۱)

چونکہ $(ل س + ن ر)^۲ - ۴ ر س (ل ن - م^۲) = (ل س - ن ر)^۲ + ۴ م^۲ ر س$

جو ایک مثبت مقدار ہے، اس لئے ظاہر ہے کہ دو درجی مساوات (۱۱) کی اصلیں ہمیشہ حقیقی ہونگی۔

نیز طبیعی وجوہات پر ل ن لازماً م² سے بڑا ہے۔ پس (۱۱) سے ظاہر ہے کہ لما کی دونوں اصلوں کی علامت ایک ہی ہوگی کیونکہ ان کا حاصل ضرب مثبت ہے اور یہ علامت منفی ہوگی کیونکہ انکا حاصل جمع منفی ہے۔

پس اصلوں کو ـ لما، ـ لما₂ لکھنے سے حل حاصل ہوتے ہیں

$$\left.\begin{array}{l} لا = ا_1 فو^{-لما_1 ت}،\quad ما = ب_1 فو^{-لما_1 ت} \\ لا = ا_2 فو^{-لما_2 ت}،\quad ما = ب_2 فو^{-لما_2 ت} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (۱۲)$$

جہاں مستقلوں ا₁، ب₁ یا ا₂، ب₂ میں رشتہ (۱۰) میں سے کسی ایک مساوات میں لما کی بجائے ـ لما₁ یا ـ لما₂ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی دراصل اختیاری مستقلوں کی تعداد صرف دو رہ جاتی ہے۔ مساواتیں (۸) کے خطی ہونے کی وجہ سے اس صورت میں جبکہ ق = ف = ۰

یہ مساواتیں بالترتیب لا اور ما کی مذکورہ بالا قیمتوں کے مجموعے سے پوری ہوتی ہیں، حل، دور کی ابتدائی آزاد برقی رو کے کم ہوتے جانے کو ظاہر کرتا ہے۔

۴۴۸

اگر ق اور ف صفر نہ ہوں بلکہ معلومہ مستقل ہوں تو ظاہر ہے کہ (۸) کا خاص تکملہ ہوگا

$$لا = \frac{ق}{ر} \quad \text{اور} \quad ما = \frac{ف}{س}$$

اس لئے مکمل حل ہوگا

$$\left.\begin{array}{l} لا = \frac{ق}{ر} + ا_1 فو^{-لما_1 ت} + ا_2 فو^{-لما_2 ت} \\ ما = \frac{ف}{س} + ب_1 فو^{-لما_1 ت} + ب_2 فو^{-لما_2 ت} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (۱۳)$$

جہاں ا، ب میں اور ا، ب میں رشتوں کا ذکر اوپر ہو چکا ہے۔ لا اور ما کی ان قیمتوں میں پہلی رقمیں ان قائم برقی رووں کو ظاہر کرتی ہیں جو دی ہوئی محرکہ برقی قوتوں کی وجہ سے وجود میں آتی ہیں۔ باقی ماندہ رقمیں امالہ کے اثر کو ظاہر کرتی ہیں۔ چونکہ درحقیقت دو اختیاری مستقل شریک ہیں اس لئے انکی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں کہ برقی رووں کی کوئی بھی دی ہوئی ابتدائی قیمتیں ہوں۔

دوسری اہم صورت وہ ہے جسمیں ق وقت کا سادہ موسیقی تفاعل اور ف صفر ہوتا ہے۔

اس طرح ق = ق جم پ ت اور ف = ۰ (۱۴)

رکھنے سے مساوات (۸) کا خاص تکملہ ذیل کے مفروض سے حاصل ہو سکتا ہے۔

لا = اَ جم پ ت + اَ جب پ ت
ما = بَ جم پ ت + بَ جب پ ت .... (۱۵)

لا اور ما کی ان قیمتوں کو درج کر کے جم پ ت اور جب پ ت کے سروں کو علیحدہ علیحدہ صفر رکھنے سے

پ ل اَ + پ م بَ + ر اَ = ق۔
- پ ل ا - پ م ب + ر اَ = ۰۔
پ م اَ + پ ن بَ + س بَ = ۰۔
- پ م ا - پ ن ب + س بَ = ۰۔ .... (۱۶)

ان رشتوں سے ا، اَ، ب، بَ دریافت ہو سکتے ہیں۔ اس طرح معلوم دوری قوت محرکہ برق کے زیر اثر دونوں دوروں میں پیدا شدہ برقی اہتزاز حاصل ہوتے ہیں۔ آزاد رویں (۱۲) کی شکل کی رقموں سے حاصل ہوتی ہیں۔ ان کی قیمت ابتدائی حالات پر منحصر ہے لیکن ہر صورت میں جیسے ت بڑھتا ہے یہ نابود ہو جاتی ہیں۔

مثال (۵)۔ بطور آخری مثال کے ذیل کی مساوات پر غور کرو۔

$$\left.\begin{aligned}\text{ا}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}+\text{ح}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}+\text{د لا}+\text{ھ ما}&=0\\ \text{ح}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}+\text{ب}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}+\text{ھ لا}+\text{ب ما}&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

۳۴۹ یہ ایسے بقائی حرکیاتی نظام کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے جسے توازن کے مقام کی قربت میں دو درجے کی آزادی حاصل ہو آزاد حرکت دریافت کرنے کے لئے $\text{لا}=\text{ما}=0$ رکھو اور فرض کرو کہ

$$\text{لا}=\text{ف فو}^{\text{لہ ت}}،\quad \text{ما}=\text{گ فو}^{\text{لہ ت}}\cdots\cdots(18)$$

اسلئے

$$\left.\begin{aligned}(\text{ا لہ}^2+\text{د})\,\text{ف}+(\text{ح لہ}^2+\text{ھ})\,\text{گ}&=0\\(\text{ح لہ}^2+\text{ھ})\,\text{ف}+(\text{ب لہ}^2+\text{ب})\,\text{گ}&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(19)$$

ان میں سے نسبت ف : گ کو ساقط کرنے سے

$$(\text{ا لہ}^2+\text{د})(\text{ب لہ}^2+\text{ب})-(\text{ح لہ}^2+\text{ھ})^2=0\qquad(20)$$

یا $(\text{ا ب}-\text{ح}^2)\,\text{لہ}^4+(\text{ا ب}+\text{د ب}-2\,\text{ھ ح})\,\text{لہ}^2+(\text{د ب}-\text{ھ}^2)=0$

(۲۱)۔۔۔۔۔

یہ لہ^2 میں دو درجی مساوات ہے

$$\text{جملات}\quad \tfrac{1}{2}\left\{\text{ا}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2+2\,\text{ح}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\times\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}+\text{ب}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2\right\}\cdots(22)$$

$$\text{اور}\quad \tfrac{1}{2}\left(\text{د لا}^2+2\,\text{ھ لا ما}+\text{ب ما}^2\right)\cdots\cdots(23)$$

بالترتیب نظام کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کو ظاہر کرتے ہیں — ان میں سے پہلا جملہ لازماً مثبت ہے پس ا، ب مثبت ہیں اور $\text{ا ب}>\text{ح}^2$ — اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۲۰) یا (۲۱) کا دایاں جانب $\text{لہ}^2=+\infty$ اور $\text{لہ}^2=-\infty$ دونوں کے لئے مثبت ہوگا۔ اور $\text{لہ}^2=0$ کے لئے علامت وہی ہوگی جو $(\text{د ب}-\text{ھ}^2)$ کی ہے۔ نیز (۲۰) سے ظاہر ہے کہ دایاں جانب $\text{لہ}^2=-\frac{\text{د}}{\text{ا}}$ اور $\text{لہ}^2=-\frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ کے لئے منفی ہوگا۔

پس اگر جملہ (۲۳) فی نفسہ منفی ہو یعنی ا اور ب منفی ہوں اور ا ب - ھ² مثبت ہو تو مساوات (۲۱) کی دو مثبت اصلوں سے پوری ہوگی جنہیں سے ایک اصل ہر دو مقدار - ا/ہ اور - ب/ب سے بڑی ہے اور دوسری اصل چھوٹی ہے۔

ان اصلوں کو لہا، لہا سے ظاہر کرنے سے حل حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{array}{l} لا = ف_1 فو^{لہا ت} + ف_2 فو^{-لہا ت} + ف_3 فو^{لہا ت} + ف_4 فو^{-لہا ت} \\ ما = گ_1 فو^{لہا ت} + گ_2 فو^{-لہا ت} + گ_3 فو^{لہا ت} + گ_4 فو^{-لہا ت} \end{array}\right\} \quad ......(۲۴)$$

ان آٹھ سروں میں سے اختیاری مستقل صرف چار ہیں نسبت ف₁ : گ₁ (جو ف₂ : گ₂ کے مساوی ہے) (۱۹) میں لہا کی بجائے لہا لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نسبت ف₃ : گ₃ یا ف₄ : گ₄ مساوات (۱۹) میں لہا کی بجائے لہا لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ باقی ماندہ چار اختیاری مستقلوں کی مدد سے لا، ما، $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}$ کو کوئی بھی ابتدائی قیمت دی جا سکتی ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ لا اور ما، ت کے ساتھ بے حد بڑھتے جائیں گے سوائے اس صورت کے کہ ابتدائی حالات کو اس طرح مرتب کیا جائے کہ ف₁ اور ف₃ صفر ہوں۔

پس اگر مقام توازن میں کی توانائی بالقوہ قریب کے کسی اور مقام کی توانائی سے زیادہ ہے تو کوئی خفیف اختیاری ہٹاؤ عموماً بڑھتا جائے گا پس مقام توازن "غیر قائم" ہے۔

اگر اسکے برخلاف جملہ (۲۳) بذاتہ مثبت ہو یعنی ا، ب، ا ب - ھ² مثبت ہوں تو لہا میں دو درجی مساوات کی اصلیں دونوں منفی ہونگی اور ان میں سے ایک اصل صفر اور - ا/ہ، - ب/ب میں سے مقداریں چھوٹی کے درمیان واقع ہوگی

اور دوسری اصل اِن دونوں میں سے مقدار میں بڑی اور $-\infty$ کے درمیان ہوگی۔ اِس سے ظاہر ہے کہ بجائے (۱۸) کے مناسب مفروضہ یہ ہے کہ

۲۵۰

$$لا = ف \; جم \; پ \; ت + ف' \; جب \; پ \; ت ،$$

$$ما = گ \; جم \; پ \; ت + گ' \; جب \; پ \; ت \quad ......(۲۵)$$

اس سے (۱۹) اور (۲۱) کی شکل کی مساواتیں حاصل ہونگی جنہیں $لہا^2$ کی بجائے $-پ^2$ لکھدیا گیا ہے۔ نیز اِس سے ثابت ہوتا ہے کہ $پ^2$ میں دو درجی مساوات کی اصلیں حقیقی اور مثبت ہونگی۔ انہیں $پ_1^2$ اور $پ_2^2$ سے ظاہر کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ حل ہے

$$\left.\begin{aligned} لا &= ف_1 \; جم \; پ_1 ت + ف'_1 \; جب \; پ_1 ت + ف_2 \; جم \; پ_2 ت + ف'_2 \; جب \; پ_2 ت \\ ما &= گ_1 \; جم \; پ_1 ت + گ'_1 \; جب \; پ_1 ت + گ_2 \; جم \; پ_2 ت + گ'_2 \; جب \; پ_2 ت \end{aligned}\right\} ...(۲۶)$$

جہاں نسبتیں $\frac{ف_1}{گ_1}$، $\frac{ف'_1}{گ'_1}$، $\frac{ف_2}{گ_2}$، $\frac{ف'_2}{گ'_2}$ مذکورۂ بالا طریقہ پر دریافت ہوسکتی ہیں۔

نیز چونکہ $\frac{ف'_1}{گ'_1} = \frac{ف_1}{گ_1}$ اور $\frac{ف'_2}{گ'_2} = \frac{ف_2}{گ_2}$ اس لئے نتیجے ذیل کی طرح بھی لکھے جاسکتے ہیں

$$\left.\begin{aligned} لا &= ف_1 \; جم \; (پ_1 ت + ط_1) + ف_2 \; جم \; (پ_2 ت + ط_2) \\ ما &= گ_1 \; جم \; (پ_1 ت + ط_1) + گ_2 \; جم \; (پ_2 ت + ط_2) \end{aligned}\right\} ...(۲۷)$$

جہاں $\frac{ف_1}{گ_1}$ اور $\frac{ف_2}{گ_2}$ قابل تعین ہیں۔ اِس سے ظاہر ہے کہ اگر مقام توازن میں توانائی بالقوہ قریب مقاموں سے کم ہے تو خفیف ہٹاؤ کی صورت میں نظام مقام توازن کے گرد اہتزازی حرکت کریگا۔ اور اس لئے توازن قائم ہوگا۔

اِس امر کو فرض کرلیا گیا ہے کہ $لہا^2$ (یا $پ^2$) میں دو درجی مساوات کی اصلیں

الگ الگ ہیں ۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اصلیں مساوی نہیں ہو سکتیں سوائے اس صورت کے جبکہ $\frac{\text{ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ج}}$ ، اور اگر یہ شرائط پوری ہوں تو حل ذیل کے دو نمونوں میں سے کسی ایک نمونے کا ہوگا

لا = ف قو^لم ت + فَ قو^-لم ت ، ما = گ قو^لم ت + گَ قو^-لم ت ...... (۲۸)

یا لا = ف جم پ ت + فَ جب پ ت ،

ما = گ جم پ ت + گَ جب پ ت ...... (۲۹)

جہاں ہر دو صورتوں میں چاروں مستقل ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں ۔
آخر میں ہمیں اس صورت پر غور کرنا ہے جبکہ توانائی بالقوہ کے لئے جملہ (۳۳) کبھی مثبت ہے اور کبھی منفی ۔ اس صورت میں اب − ھ² منفی ہوگا اور نتیجۃً دو درجی مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی اور دوسری اصل منفی ۔ جب حل ذیل کے نمونے کا ہوگا

لا = ف قو^لم ت + فَ قو^-لم ت + فً جم پً ت + فٍ جب پً ت
ما = گ قو^لم ت + گَ قو^-لم ت + گً جم پً ت + گٍ جب پً ت ...... (۳۰)

اس سے ظاہر ہے کہ کوئی اختیاری خفیف ہٹاؤ عموماً بے حد بڑھتا جائیگا ، اس لئے اس مقام توازن کو غیر قائم شمار کرنا چاہئے ۔
اس سوال کو حل کرنے کے ذرا دوسرے طریقے میں فرض کرو کہ

ما = مـا لا .... (۳۱)

زیرِ غور مساواتیں اب ذیل کی شکل اختیار کرتی ہیں

(ا + مـا ج) $\frac{\text{د}^2\text{لا}}{\text{دت}^2}$ + (ا + مـا ھ) لا = ۰
(ج + مـا بَ) $\frac{\text{د}^2\text{لا}}{\text{دت}^2}$ + (ھ + مـا ب) لا = ۰ ...... (۳۲)

۴۵۱

یہ دونوں مساوات لا = ف قو^(لما ت) .... (۳۳)

سے پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ

(ا + مما ج) / (د + مما ہ) = (ج + مما کب) / (ہ + مما ب) = − ۱ / لما² ...... (۳۴)

پس مما دو درجی مساوات

(ج ب − ک ب ہ) مما² + (ا ب − ک ب د) مما + (ا ہ − ج د) = ۰ .... (۳۵)

سے دریافت ہوسکتا ہے۔ اگر مما۱ اور مما۲ اسکی اصلیں ہوں تو لما² کی مماثل قیمتیں (۳۴) سے ملتی ہیں۔ اس طرح سے دو حل حاصل ہوتے ہیں جنکو تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی وجہ سے ایک دوسرے کے ساتھ شریک کرسکتے ہیں

اگر (۳۴) میں سے مما کو ساقط کردیا جائے تو لما² میں وہی باویروالی دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے پس (۳۵) کی اصلوں کے حقیقی ہونیکی شرطیں وہی ہونگی جو (۲۱) کی صورت میں تھیں۔ اس امر کی بآسانی تصدیق ہوسکتی ہے۔

اگر لما² منفی ہے تو حل ذیل کے نمونے کا ہوگا

لا = ف۱ جم (پ۱ ت + طما۱) ، ما = مما۱ ف۱ جم (پ۱ ت + طما۱)
لا = ف۲ جم (پ۲ ت + طما۲) ، ما = مما۲ ف۲ جم (پ۲ ت + طما۲) ...... (۳۶)

جہاں ف۱ ، ف۲ ، طما۱ ، طما۲ اختیاری مستقل ہیں۔

ان میں سے ہر ایک حل بذات خود نظام کے ایسے اہتزاز کو ظاہر کرتا ہے جسے اسکی طبیعی کیفیت کہہ سکتے ہیں۔

قسری اہتزاز دریافت کرنیکے لئے جبکہ ذیل کے شکل کی قوتیں لا اور ما عمل کررہی ہیں

لا = عما جم (ن ت + طما) ، ما = ب ما جب (ن ت + طما) ...... (۳۷)

فرض کرو کہ لا = ف جم (ن ت + طما) ، ما = گ جب (ن ت + طما) ۔ (۳۸)

اب مستقل ف اور گ ، (۲۷) میں اندراج سے حاصل ہوسکتے ہیں۔ اسکے ناکام رہنے کی ایک صورت وہ ہوگی جبکہ جملہ (۲۳) لازماً مثبت ہوا کرا وجہ سے

ن۲، نپا۲ میں کی دو درجی مساوات کی ایک اصل سے منطبق ہوجائے گا۔

امثلہ ۵۶

(مستقل سر)

(۱) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$ $[\text{ما} = \text{ا} + \text{ب قو}^{-\text{لا}}]$

(۲) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - 3\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - 10\,\text{ما} = 0$ $[\text{ما} = \text{ا قو}^{5\text{لا}} + \text{ب قو}^{-2\text{لا}}]$

(۳) $2\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - 3\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = 0$ $[\text{ما} = \text{ا قو}^{\text{لا}} + \text{ب قو}^{\frac{\text{لا}}{2}}]$

(۴) $\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} - 6\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + 11\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - 6\,\text{ما} = 0$

$[\text{ما} = \text{ا قو}^{\text{لا}} + \text{ب قو}^{2\text{لا}} + \text{ج قو}^{3\text{لا}}]$

(۵) $\frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فرلا}^{4}} = \text{م}^{4}\,\text{ما}$ $[\text{ما} = \text{ا قو}^{\text{ملا}} + \text{ب قو}^{-\text{ملا}} + \text{ج جم ملا} + \text{د جب ملا}]$ ۲۵۲

(۶) $\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} - \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = 0$

$[\text{ما} = \text{ا قو}^{\text{لا}} + \text{ب جم لا} + \text{ج جب لا}]$

(۷) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - 2\text{م}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (\text{م}^{2} + \text{ن}^{2})\,\text{ما} = 0$

$[\text{ما} = \text{قو}^{\text{ملا}}(\text{ا جم ن لا} + \text{ب جب ن لا})]$

(۸) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - ۴\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۱۳\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \text{فو}^{۲\text{لا}}(\text{ا جم ۳لا} + \text{ب جب ۳لا})\right]$

(۹) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۲\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۵\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \text{فو}^{-\text{لا}}(\text{ا جم ۲لا} + \text{ب جب ۲لا})\right]$

(۱۰) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - ۶\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۱۳\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \text{فو}^{۳\text{لا}}(\text{ا جم ۲لا} + \text{ب جب ۲لا})\right]$

(۱۱) $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۴}} + \text{م}^{۴}\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \left(\text{ا جمز}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}} + \text{ب جبز}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}}\right)\text{جم}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}}\right.$

$\left. + \left(\text{ج جمز}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}} + \text{د جبز}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}}\right)\text{جب}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}}\right]$

(۱۲) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} + \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \text{ا فو}^{\text{لا}} + (\text{ب} + \text{ج لا})\,\text{فو}^{-\text{لا}}\right]$

(۱۳) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} - \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\,\text{فو}^{\text{لا}} + \text{ج فو}^{-\text{لا}}\right]$

(۱۴) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} - ۳\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۴\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\,\text{فو}^{۲\text{لا}} + \text{ج فو}^{-\text{لا}}\right]$

(۱۵) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} - ۳\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\,\text{فو}^{\text{لا}} + \text{ج فو}^{-۲\text{لا}}\right]$

(۱۶) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} - ۳\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۳\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا} + \text{ج لا}^{۲})\,\text{فو}^{\text{لا}}\right]$

(۱۷) $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۴}} + (\text{م}^{۲} + \text{ن}^{۲})\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \text{م}^{۲}\text{ن}^{۲}\,\text{ما} = ۰$

$\left[\text{ما} = \text{ا جم}(\text{م لا} + \text{عہ}) + \text{ب جم}(\text{م لا} + \text{بہ})\right]$

(۱۸) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \text{ک}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{م ما لا} = ۰$ کا حل ذیل کی

شکل کا ہے

$$\text{لا} = \text{ا قو}^{\text{-عہ ت}} + \text{ب قو}^{\text{بہ ت}}$$

جہاں عہ اور بہ دونوں مثبت ہیں (اگر کہ اور مہ مثبت ہیں) اور عہ کے بہ

۳۵۳

(۱۹) $$\frac{\text{ف}^{۲}\text{ما}}{\text{ف لا}^{۲}} - ۲\text{م}\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} + \text{م}^{۲}\text{ما} = \text{جب ن لا}$$

$$\left[\text{ما} = \frac{(\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲})\text{جب ن لا} + ۲\text{م ن جم ن لا}}{(\text{م}^{۲} + \text{ن}^{۲})^{۲}} + \dots \text{تتمہ تفاعل}\right]$$

(۲۰) $$\frac{\text{ف}^{۳}\text{ما}}{\text{ف لا}^{۳}} - \frac{\text{ف}^{۲}\text{ما}}{\text{ف لا}^{۲}} - \frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} + \text{ما} = \text{جمز لا} \quad \left[\text{ما} = \frac{۱}{۸}\text{لا}^{۲}\text{قو}^{\text{لا}} + \frac{۱}{۴}\text{لا قو}^{\text{-لا}} + \text{تتمہ تفاعل}\right]$$

(۲۱) $$\frac{\text{ف}^{۲}\text{ما}}{\text{ف لا}^{۲}} + \frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = ۱ + \text{جمز لا} \quad \left[\text{ما} = \text{لا} + \frac{۱}{۲}\text{قو}^{\text{لا}} - \frac{۱}{۲}\text{لا قو}^{\text{-لا}} + \dots\right]$$

(۲۲) $$\frac{\text{ف}^{۲}\text{ما}}{\text{ف لا}^{۲}} - \text{م}^{۲}\text{ما} = \text{جم ک لا} + \text{جمز ک لا}$$

$$\left[\text{ما} = \frac{۱}{\text{ک}^{۲} - \text{م}^{۲}}(\text{جم ک لا} + \text{جمز ک لا}) + \dots\right]$$

(۲۳) $$(\text{عف}^{۲} - \text{م}^{۲})\text{ما} = \text{جمز م لا} + \text{جم م لا}$$

$$\left[\text{ما} = \frac{\text{لا}}{۲\text{م}}(\text{جمز م لا} - \text{جب م لا}) + \dots\right]$$

(۲۴) $$\text{عف}^{۲}(\text{عف}^{۲} - ۱)\text{ما} = \text{جمز لا} \quad \left[\text{ما} = \frac{۱}{۲}\text{لا جمز لا} + \dots\right]$$

(۲۵) $$(\text{عف}^{۲} + \text{م}^{۲})^{۲}\text{ما} = \text{جمز م لا} + \text{جم م لا}$$

$$\left[\text{ما} = \frac{۱}{\text{م}^{۴}}\text{جمز م لا} - \frac{۱}{۸\text{م}^{۲}}\text{لا}^{۲}\text{جم م لا} + \dots\right]$$

(۲۶) مساوات $\frac{ف^۲ لا}{ف ت^۲} + ۲ ن \frac{ف لا}{ف ت} + ن^۲ لا = ف \ جب \ پ ت$ سے

لا اور $\frac{ف لا}{ف ت}$ کی قیمتیں ذیل کی شرائط کے ماتحت دریافت کرو

ت = ۰ کے لئے $\frac{ف لا}{ف ت} = ۰$ اور لا = ۰

$$\left[لا = \frac{ف}{ر^۲} \left\{ جب (پ ت - ۲ صہ) + (پ ت + جب ۲ صہ) قو^{-ن ت} \right\} \right.$$

$$اور \ \frac{ف لا}{ف ت} = \frac{ف \ جب \ صہ}{ر} \left\{ جم (پ ت - ۲ صہ) - (ن ت - جم ۲ صہ) قو^{-ن ت} \right\}$$

جہاں $ر = \sqrt{پ^۲ + ن^۲}$ اور $صہ = ست^{-۱} \left(\frac{پ}{ن} \right)$]

امثلہ ۵۷

(متجانس مساواتیں)

(۱) $لا^۲ \frac{ف^۳ ما}{ف لا^۳} + لا \frac{ف^۲ ما}{ف لا^۲} - ۴ \frac{ف ما}{ف لا} = ۰$ $\left[ما = ا + \frac{ب}{لا} + ج لا^۳ \right]$

(۲) $\frac{ف^۲ ق}{ف ر^۲} + \frac{۱}{ر} \frac{ف ق}{ف ر} = ۰$ کو بطور متجانس خطی مساوات کے حل کرو

$[ق = ا \ لوک \ ر + ب]$

(۳) $لا^۲ \frac{ف^۳ ما}{ف لا^۳} - ۲ \frac{ف ما}{ف لا} = ۰$ $[ما = ا + ب \ لوک \ لا + ج لا^۳]$

(۴) $لا^۲ \frac{ف^۲ ما}{ف لا^۲} - ۲ ما = لا$ $\left[ما = ا لا^۲ + \frac{ب}{لا} - \frac{لا}{۲} \right]$

[لا = (ا + ب ت) قو^{۲ت}، ما = (ا - ب + ب ت) قو^{۲ت}]

(۳) فرلا/فرت + ۲لا + ما = قو^ت ، فرما/فرت + ۳ما - لا = قو^{۲ت}

[لا = (ا + ب ت) قو^{-۴ت} + ۴/۲۵ قو^ت - ۱/۳۶ قو^{۲ت}،

ما = -(ا + ب + ب ت) قو^{-۴ت} + ۱/۲۵ قو^ت + ۵/۳۶ قو^{۲ت}]

(۴) حل کرو فرلا/فرت = لا^۲ + لا ما ، فرما/فرت = ما^۲ + لا ما ۴۵۵

[لا = (ا + ب)/(ا - ۲ت) ، ما = (ا - ب)/(ا - ۲ت)]

(۵) فر^۲لا/فرت^۲ + ۳لا - ۴ما + ۳ = ۰ ، فر^۲ما/فرت^۲ + لا - ما + ۵ = ۰

[لا = (ا + ب ت) جم ت + (اَ + بَ ت) جب ت - ۱۷،

ما = ½ (ا + بَ + ب ت) جم ت + ½ (اَ - ب + بَ ت) جب ت - ۱۲]

(۶) ثابت کرو کہ مساوات فرلا/فرت = ا لا + ھ ما ، فرما/فرت = ھ لا + ب ما

کے تکملے لا = ا۱ قو^{لم۱ت} + ا۲ قو^{لم۲ت} اور ما = مم۱ ا۱ قو^{لم۱ت} + مم۲ ا۲ قو^{لم۲ت} ہیں

جہاں مم۱ اور مم۲ جبریہ مساوات مم^۲ + (ا - ب)/ھ مم - ۱ = ۰ کی

اصلیں ہیں

اور لم۱ = ا + ھ مم۱ ، لم۲ = ا + ھ مم۲

ل $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ر لا} = -\frac{\text{ق}}{\text{ک}}$ اور $\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}} = \text{لا}$ ہے جہاں لا برقی رو ہے اور ق کثفہ کا برقی بار ہے۔ خروج کے اہتزازی ہونے کی شرط دریافت کرو۔

$[\text{ل} > \frac{1}{4}\text{ر}^2\text{گ}]$

(۱۲) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = 0$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ما}^3}$ اور ثابت کرو کہ حل ایسے مخروطی کو ظاہر کرتا ہے جو بلحاظ لا محور کے متشاکل ہے۔

(۱۳) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = 0$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ ما}^3$

اور ثابت کرو کہ مساوات کو پورا کرنیوالے منحنیوں میں زائدوں کا ایک قبیل بھی شریک ہے۔

(۱۴) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ن}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{ف}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = \text{ن}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$

$[\text{لا} = \text{عہ} + \text{اجم}(\text{ن ت} + \text{صہ})$، $\text{ما} = \text{یہ} + \frac{\text{ف}}{\text{ن}}\text{ت} + \text{اجب}(\text{ن ت} + \text{صہ})]$

(۱۵) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} - 2\text{ن}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{م}^2\text{لا} = 0$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} + 2\text{ن}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{م}^2\text{ما} = 0$

$[\text{لا} = \text{اجم}(\text{پ ت} + \text{صہ}) + \text{اَجم}(\text{پَ ت} + \text{صہَ})$

$\text{ما} = -\text{اجب}(\text{پ ت} + \text{صہ}) + \text{اَجب}(\text{پَ ت} + \text{صہَ})]$

جہاں $\text{پ}، \text{پَ} = \sqrt{\text{م}^2 + \text{ن}^2} \pm \text{ن}$

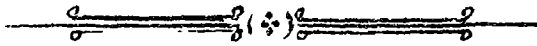
(۱۶) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} + (\text{مہ} + 1)\frac{\text{ج}}{\text{ب}}\text{لا} - \text{مہ}\frac{\text{ج}}{\text{ب}}\text{ما} = 0$

$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{ج}}{\text{ب}}\text{ما} = 0$

یہ دوہرے رقاص کے حرکت کی مساوات ہے جس کی اوپر کی اور نیچے کی ڈوریوں کے طول بالترتیب ا اور ب ہیں اور مہا نیچے اور اوپر کے ذروں کی کمیتوں کی نسبت ہے۔ ثابت کرو کہ طبیعی اہتزاز کے دور $\frac{2\pi}{\text{پ}_1}$ اور $\frac{2\pi}{\text{پ}_2}$ ہونگے اگر پ_1^2 اور پ_2^2 مساوات

$$\text{پ}^4 - (1 + \text{مہا})\,\text{ج}\left(\frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ب}}\right)\text{پ}^2 + (1 + \text{مہا})\frac{\text{ج}^2}{\text{ا}\,\text{ب}} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اس مساوات کی پ^2 میں اصلیں حقیقی، مثبت اور جداگانہ ہونگی۔

۴۵۷

چودھواں باب

قوتی سلسلوں کا تفرق اور تکمل

۱۷۴ - سوال کا بیان - اس باب کا اصل مقصد اس امر کے ثبوت کی رہنمائی کرنا ہے کہ مناسب شرائط کے ماتحت تفرق اور تکمل کے عمل کو ایسے تفاعلوں پر استعمال کر سکتے ہیں جو قوتی سلسلوں سے بیان ہوں مثلاً اس نمونہ کے سلسلوں سے

$$\text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \dots\dots \quad (1)$$

جہاں $\text{ا}_{\text{ر}}$ مستقل ہیں پس اگر ص (لا) اس سلسلہ کے حاصل جمع کو ظاہر کرے اور یہ فرض کر لیا جائے کہ کسی خاص وقفہ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے سلسلہ مستدق ہے تو ہمیں وہ شرائط دریافت کرنا ہیں جن کے ماتحت یہ بیان کیا جا سکتا ہے کہ ص (لا) متغیر لا کا مسلسل اور قابل تفرق تفاعل ہے اور علاوہ اس کے

$$\text{ص}'(\text{لا}) = \text{ا}_{1} + 2\,\text{ا}_{2}\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_{3}\,\text{لا}^{2} + \dots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \dots \quad (2)$$

اور

$$\int_{0}^{\text{لا}} \text{ص}(\text{لا})\,\text{ءلا} = \text{ا}_{0}\,\text{لا} + \frac{1}{2}\,\text{ا}_{1}\,\text{لا}^{2} + \frac{1}{3}\,\text{ا}_{2}\,\text{لا}^{3} + \dots + \frac{1}{\text{ن}+1}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}+1} + \dots \quad (3)$$

اگر (۱) میں رقموں کی تعداد محدود ہوتی تو زیر غور مسئلے کے ثبوت کی ضرورت نہ ہوتی اور جو کتاب میں اب تک بتایا جا چکا ہے (دیکھو دفعہ ۲۹ اور ۴۷) وہی کافی ہوتا۔ لیکن اس امر کو اچھی طرح خیال میں رکھنا چاہئے کہ لا انتہا سلسلوں کے متعلق اصطلاح "حاصل جمع" کے معنے کچھ مصنوعی سے ہوتے ہیں، اور بغیر تحقیق کے اس امر کو فرض کرنے کا ہمیں کوئی مجاز نہیں ہے کہ اگر ایک مسئلہ اصطلاح کے ایک معنی میں صحیح ہے تو وہ دوسرے معنی میں بھی صحیح ہوگا۔

سلسلہ (۱) کی پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کے لئے کوئی علامت اختیار کرنے سے سہولت ہوگی اس لئے ہم لکھتے ہیں

$$ص_ن (لا) = ا + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots\ldots + ا_{ن-۱} لا^{ن-۱} \ldots\ldots (۴)$$

جو لا میں (ن - ۱) درجے کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اسے ہم جزوی حاصل جمع کہینگے اور اس کی ترسیمی تعبیر "تقریبی منحنی" کہلائیگا۔ ایسے منحنیات کی ایک مثال شکل ۱۳۶ میں دی ہوئی ہے۔ نیز اگر فرض کریں کہ

$$ص (لا) = ص_ن (لا) + ر_ن (لا) \ldots\ldots (۵)$$

تو مقدار $ر_ن$ (لا) کو ن رقموں کے بعد کا "باقی" کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ $ر_ن$ (لا) سلسلہ

$$ا_ن لا^ن + ا_{ن+۱} لا^{ن+۱} + \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

کا حاصل جمع ہے۔

مفروضہ کی بنا پر تواتر

$$ص_۱ (لا)،\ ص_۲ (لا)،\ ص_۳ (لا) \ldots\ldots\ldots (۷)$$

کی انتہائی قیمت (لا) کی ایسی قیمت کے لئے جس کے لئے ابتدائی سلسلہ

۴۵۸

ستدق ہے) ص (لا) ہے، اسی سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تواتر

کا، (لا) ، کا۲ (لا) ، کا۳ (لا) ، .... (۸)

کی انتہائی قیمت صفر ہے۔

اس امر کو ملحوظ رکھنا چاہیے کہ مذکورہ بالا تمام مسائل میں ہمیں دوہری انتہا سے واسطہ پڑا ہے۔ لہذا ص ن (لا) کا تسلسل ثابت کرنے کے لئے جبکہ لا ← ل ہمیں یہ دکھانا ہے کہ

نہا (لا ← ل) نہا (ن ← ∞) ص ن (لا) = نہا (ن ← ∞) نہا (لا ← ل) ص ن (لا) ..... (۹)

نیز ضابطے (۲) اور (۳) بالترتیب اس طرح لکھے جا سکتے ہیں

فر / فرلا [نہا (ن ← ∞) ص ن (لا)] = نہا (ن ← ∞) فر / فرلا [ص ن (لا)] ... (۱۰)

اور ∫ [نہا (ن ← ∞) ص ن (لا)] فرلا = نہا (ن ← ∞) ∫ ص ن (لا) فرلا ... (۱۱)

چونکہ مشتق تفاعل خارج قسمت کی انتہا ہے اور محدود تکملہ حاصل جمع کی انتہا ہے اس لئے (۱۰) اور (۱۱) کے جملات بھی دوہری انتہا کے تحت میں آتے ہیں۔ یہ فرض نہیں کر لینا چاہیے اور نہ ہی یہ ہمیشہ درست ہوتا ہے کہ نتیجہ انتہا لینے کی ترتیبوں پر منحصر نہیں ہے۔

۱۷۵ ۔ لوکارثمی سلسلہ کی دریافت : ایک یا دو مثالیں ایسی ہیں جن کی صورت میں مذکورۂ بالا سوالات کا جواب بغیر کسی مشکل کے دیا جا سکتا ہے کیونکہ ایسی صورتوں میں کان (لا) کی شکل معلوم ہوتی ہے۔ اور ان سے جو نتائج مرتب ہوتے ہیں وہ بہت اہم ہیں۔

سلسلہ ہندسیہ کے نظریہ میں سادہ تقسیم کے عمل سے ظاہر ہے کہ

* [بطور مثال دفعہ ۳۰۱ دیکھو]

$$\frac{1}{1+\text{ت}} = 1 - \text{ت} + \text{ت}^2 - \ldots + (-1)^{\text{ن}-1}\,\text{ت}^{\text{ن}-1} + (-1)^{\text{ن}}\frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{1+\text{ت}} \quad \ldots (1)$$

بشرطیکہ ت ≠ -۱۔ فرض کرو کہ لا مثبت ہے تو (۱) سے

$$\text{لوک}(1+\text{لا}) = \int_0^{\text{لا}} \frac{\text{فت}}{1+\text{ت}} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\text{ن}-1}\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + (-1)^{\text{ن}}\int_0^{\text{لا}} \frac{\text{ت}^{\text{ن}}\,\text{فت}}{1+\text{ت}} \quad \ldots\ldots (2)$$

۴۵۹ آخری رقم میں تکملہ کی قیمت بڑھ جائے گی اگر تکمل کے نسب نما میں اسکی کم سے کم قیمت یعنی ایک درج کر دیجائے۔ اسلئے تکملہ کم ہے $\int_0^{\text{لا}} \text{ت}^{\text{ن}}\,\text{فت}$ سے

یعنی $\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ سے۔

اگر لا ایک سے کم ہو یا ایک کے مساوی بھی ہو تو جیسے ن بڑھتا ہے اسکی انتہا صفر ہوتی ہے۔ پس اگر لا مثبت ہو اور $\not>$ ۱ تو

$$\text{لوک}(1+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \ldots + (-1)^{\text{ن}-1}\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \ldots\ldots (3)$$

جہاں سلسلہ لا تناہی تک پھیلتا ہے۔

بالخصوص لا = ۱ رکھنے سے

$$\text{لوک}\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

اس نتیجہ سے اگرچہ صحیح جواب حاصل ہو سکتا ہے لیکن سلسلہ کے بہت آہستہ متقارب ہونے کی وجہ سے یہ ضابطہ عددی حسابات کے لئے موزوں نہیں ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اعشاریہ کے ن مقام تک صحیح نتیجہ نکالنے کے لئے تقریباً $10^{\text{ن}}$ ارقام درکار ہونگی۔ عملی طور پر زیادہ مفید ضابطہ (۱۲) ذیل میں درج ہے۔

پھر
$$\frac{1}{1-\text{ت}} = 1 + \text{ت} + \text{ت}^2 + \ldots + \text{ت}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{1-\text{ت}} \quad \ldots\ldots (5)$$

بشرطیکہ ت ≠ ۱، پس اگر لا ایک سے کم مثبت مقدار ہے تو

$$\int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{فرت}}{\text{۱−ت}} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \dots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{\text{۱−ت}}\,\text{فرت} \quad \dots (۶)$$

بائیں جانب کے تکملہ کی قیمت بڑھ جاتی ہے اگر نسب نما کی بجائے اسکی کم سے کم قیمت جو تکمل کے حدود کے اندر واقع ہوتی ہے اس میں درج کردی جائے یعنی نسب نما کی بجائے (۱−لا) رکھ دیا جائے

پس

$$\int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{\text{۱−ت}}\,\text{فرت} < \frac{۱}{\text{۱−لا}} \int_{0}^{\text{لا}} \text{ت}^{\text{ن}}\,\text{فرت} < \frac{\text{لا}^{\text{ن}+۱}}{(\text{ن}+۱)(\text{۱−لا})} \quad \dots (۷)$$

چونکہ مفروضہ کی رو سے لا ایک سے کم ہے اس لئے جیسے ن بڑھتا ہے اس کی انتہا صفر ہوتی ہے۔

نیز چونکہ

$$\int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{فرت}}{\text{۱−ت}} = \Big[-\text{لوک}(\text{۱−ت})\Big]_{0}^{\text{لا}} = -\text{لوک}(\text{۱−لا}) \quad \dots (۸)$$

اس لئے

$$\text{لوک}(\text{۱−لا}) = -\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} - \dots - \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} - \dots \text{لاانتہا تک} \quad (۹)$$

۴۶۰

ضابطوں (۴) اور (۹) کو ذیل کے ایک ضابطہ سے بیان کیا جاسکتا ہے

$$\text{لوک}(\text{۱+لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۴} + \dots + (-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \dots \quad (۱۰)$$

جہاں یہ ضابطہ لا کی −۱ سے +۱ تک کی تمام قیمتوں کے لئے برقرار رہتا ہے بشرطیکہ (−۱) کو حدود سے خارج کردیا جائے اور (+۱) کو شریک کرلیا جائے بائیں جانب کا سلسلہ لوکارثمی سلسلہ کہلاتا ہے[*]

اگر لا مثبت ہو اور ایک سے کم ہو تو (۳) میں سے (۱۰) کو تفریق کرنے سے

---

[*] ایسا معلوم ہوتا ہے کہ پہلے پہل اس سلسلہ کو این مرکیٹر (N. Mercater) نے ۱۶۶۸ء میں دیا تھا

$$\text{لوک}\ \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} = 2\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} + \dots\right) \dots\dots (11)$$

اسی نتیجہ میں اگر $\text{لا} = \frac{1}{2\text{م}+1}$ درج کریں تو

$$\text{لوک}\,(\text{م}+1) - \text{لوک}\ \text{م} = \text{لوک}\ \frac{\text{م}+1}{\text{م}}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{2\text{م}+1} + \frac{1}{3(2\text{م}+1)^3} + \frac{1}{5(2\text{م}+1)^5} + \dots\right\} \dots\dots (12)$$

یہ سلسلہ م = ۱ کے لئے بھی بہت جلد مستدق ہوتا ہے۔ م = ۱، ۲، ۳، ... رکھنے سے لوک ۲، لوک ۳ ـ لوک ۲، لوک ۴ ـ لوک ۳ ... کی سلسلہ وار قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں، اور اس سے طبیعی اعداد ۲، ۳، ... کے لوکارتموں کی قیمتیں اساس قو کے لحاظ سے حاصل ہو جائینگی جب لوک ۱۰ کی قیمت معلوم ہو جائے تو اس کا الٹ مقیاس مہا کو ظاہر کرتا ہے جس کے ساتھ ضرب دینے سے اساس قو کے لوکارتم اساس ۱۰ کے لوکارتموں میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔*

مثال (۱) :- اگر ن > ۱ تو $\text{لوک}\ \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}} = \text{لوک}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right) = \frac{1}{\text{ن}} - \frac{1}{2\text{ن}^2}$

$$+ \frac{1}{3\text{ن}^3} - \dots\dots (12)$$

چونکہ ارقام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہیں اور ان کی انتہا صفر ہے، اسلئے ان کا حاصل جمع دفعہ ۵ کی رو سے $\frac{1}{\text{ن}}$ سے بڑا ہوگا۔

---

* مہا کے دریافت کرنیکا سریع طریقہ ذیل کی متماثلہ مساوات کے ذریعہ ہے

$$\text{لوک}\ 10 = 3\ \text{لوک}\ 2 + \text{لوک}\ \frac{5}{4}$$

بائیں جانب کے لوکارتم ضابطہ (۱۲) میں م = ۱ اور م = ۴ رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں

۴۶۱

نیز $\text{لوگ}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}-۱}\right) = -\text{لوگ}\left(۱-\frac{۱}{\text{ن}}\right) = \frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{۲\text{ن}^۲} + \frac{۱}{۳\text{ن}^۳} + \dots$ (۱۴)

جو ظاہر ہے کہ $\frac{۱}{\text{ن}}$ سے بڑا ہے

اس لئے $\frac{۱}{\text{ن}} > \text{لوگ}\,\frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}} > \frac{۱}{\text{ن}+۱}$ .... (۱۵)

مثال ۲ — فرض کرو کہ

$$\left.\begin{array}{l} \text{ع}_\text{ن} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{۱}{\text{ن}} - \text{لوگ ن} \\ \text{و}_\text{ن} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{۱}{\text{ن}} - \text{لوگ}(\text{ن}+۱) \end{array}\right\} \dots (۱۶)$$

جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے۔ تو (۱۵) سے

$$\text{ع}_\text{ن} - \text{ع}_{\text{ن}+۱} = \text{لوگ}\,\frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{ن}+۱} > ۰ \qquad (۱۷)$$

اور $\text{و}_{\text{ن}+۱} - \text{و}_\text{ن} = \frac{۱}{\text{ن}+۱} - \text{لوگ}\,\frac{\text{ن}+۲}{\text{ن}+۱} > ۰$ (۱۸)

نیز $\text{ع}_\text{ن} - \text{و}_\text{ن} = \text{لوگ}\,\frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}}$ .... (۱۹)

جس کی قیمت صفر اور $\frac{۱}{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہے۔

اس لئے مقادیر $\text{ع}_۱، \text{ع}_۲، \text{ع}_۳ \dots\dots \text{ع}_\text{ن}$ .... (۲۰)

ایک مسلسل گھٹنے والا سلسلہ بناتی ہیں

اور $\text{و}_۱، \text{و}_۲، \text{و}_۳، \dots\dots \text{و}_\text{ن}$ .... (۲۱)

ایک بڑھنے والے سلسلے کو ظاہر کرتی ہیں۔ نیز چونکہ (۲۰) کا ہر رکن ضابطہ (۱۹) کے مطابق (۲۱) کے مماثل رکن سے بڑا ہے اس لئے سلسلہ (۲۰) کی ایک نچلی انتہا ہے (دفعہ ۲) اور سلسلہ (۲۱) کی ایک اوپری انتہا ہے۔

نیز چونکہ $\lim_{\text{ن}\to\infty}(\text{ع}_\text{ن} - \text{ف}_\text{ن}) = ۰$ .... (۲۲)

اس لئے یہ دونوں انتہائیں مساوی ہیں۔ پس

$$\lim_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\text{ن}} - \text{لوگ ن}\right) = \text{جما} \quad \text{...(۲۳)}$$

جہاں جما کی ایک خاص مستقل قیمت ہے اور یہ یولر کا مستقل کہلاتا ہے۔ نیز $\text{ف}_1 = 1 - \text{لوگ } 2 > 0$ ۔ اس لئے جما مثبت ہے۔ اس کی قیمت ۰.۵۷۷۲۱۵۶۶..... دریافت ہوئی ہے۔*

۱۷۶ ـ گریگوری کا سلسلہ۔

چونکہ
$$\frac{1}{1+\text{ت}^2} = 1 - \text{ت}^2 + \text{ت}^4 \dots + (-1)^{\text{ن}-1}\text{ت}^{2\text{ن}-2} + (-1)^{\text{ن}}\frac{\text{ت}^{2\text{ن}}}{1+\text{ت}^2} \quad \text{...(۱)}$$

اس لئے
$$\int_0^{\text{لا}}\frac{\text{فرت}}{1+\text{ت}^2} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} \dots + (-1)^{\text{ن}-1}\frac{\text{لا}^{2\text{ن}-1}}{2\text{ن}-1}$$
$$+ (-1)^{\text{ن}}\int_0^{\text{لا}}\frac{\text{ت}^{2\text{ن}}}{1+\text{ت}^2}\,\text{فرت} \quad \text{.......(۲)}$$

اگر لا مثبت ہے اور $\ngtr 1$ تو آخرالذکر تکملہ $\int_0^1 \text{ت}^{2\text{ن}}\,\text{فرت}$ یعنی $\frac{1}{2\text{ن}+1}$ ...(۳)

سے کم ہے اور اسلئے جیسے ن بڑھتا ہے یہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔

پس
$$\text{مس}^{-1}\text{لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} \dots + (-1)^{\text{ن}-1}\frac{\text{لا}^{2\text{ن}-1}}{2\text{ن}-1} + \dots \quad \text{(۴)}$$

اسمیں $\text{مس}^{-1}\text{لا}$ کی وہ قیمت لینی چاہیئے جو لا کے ساتھ صفر سے شروع ہوتی ہے۔ یہ سلسلہ گریگوری کا سلسلہ† کہلاتا ہے۔ نیز چونکہ (۴) کے دونوں جانب کی

---

* اس کے دریافت کرنے کا طریقہ اس کتاب کی حدود سے باہر ہے

† اسکے دریافت کنندہ گریگوری (۱۶۷۱) کے نام کی بنا پر۔

علامت لا کے ساتھ بدلتی ہے اس لئے مساوات (۴) لا کی ۱- سے ۱+ تک (دونوں حدود شریک نہیں) کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح رہتی ہے۔

لا = ۱ رکھنے سے

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots \quad (۵)$$

سلسلہ بہت آہستہ مستدق ہوتا ہے اسلئے π کی قیمت دریافت کرنیکے لئے دیگر سلسلے استعمال کئے جاتے ہیں۔ یولر نے ذیل کی مساوات متطابقہ استعمال کی

$$\frac{\pi}{4} = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3} \quad \dots\dots (۶)$$

جس سے

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} - \dots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 3^3} + \frac{1}{5\times 3^5} - \dots\right) \dots (۷)$$

اس سے پیشتر میخن (Machin) نے ضابطہ

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239} \quad \dots\dots (۸)$$

استعمال کیا تھا۔ (۶) اور (۸) کا ثبوت علم مثلث کی اکثر ابتدائی کتابوں میں دیا جاتا ہے۔

(۸) سے

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5\times 5^5} - \dots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\times 239^3} + \frac{1}{5\times 239^5} - \dots\right) \dots (۹)$$

مسئلہ کی اہمیت کی وجہ سے یہ مناسب ہوگا کہ میخن کے ضابطہ سے π کی قیمت دریافت کرنیکا عمل توضیح کے ساتھ دیا جائے۔ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}$ دریافت کرنیکے لئے ہم پہلے ذیل کی جدول بناتے ہیں۔

ن	$\frac{1}{5^{ن}}$	$\pm\frac{1}{ن\times 5^{ن}}$
۱	٫۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰	+ ٫۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۳	۸۰۰۰۰۰۰۰	− ۲۶۶۶۶۶۶۷
۵	۳۲۰۰۰۰	+ ۶۴۰۰۰۰
۷	۱۲۸۰۰۰	− ۱۸۲۸۶
۹	۵۱۲۰	+ ۵۶۹
۱۱	۲۰۵	− ۱۹
۱۲	۸	+ ۱

۴۶۳

آخری کالم کی مثبت رقموں کا حاصل جمع ۰٫۲۰۰۰۶۴۰۵۷۰ ہے اور منفی رقموں کا مجموعہ ۰٫۰۰۲۶۶۸۴۹۷۲ ہے۔

اس لئے $\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}$ = ۰٫۱۹۷۳۹۵۵۵۹۸

نیز $\text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$ کی قیمت دریافت کرنے کے لئے ذیل کی جدول ہے

ن	$\frac{1}{239^{\text{ن}}}$	$\pm\frac{1}{\text{ن}\times 239^{\text{ن}}}$
۱ ۳	۰٫۰۰۴۱۸۴۱۰۰۴ ۷۳۲	۰٫۰۰۴۱۸۴۱۰۰۴ + ۲۴۴ −

اس لئے $\text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$ = ۰٫۰۰۴۱۸۴۰۷۶۰

پس $\frac{\pi}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$

= + ۰٫۷۸۹۵۸۲۲۳۹۲

− ۰٫۰۰۴۱۸۴۰۷۶۰

= ۰٫۷۸۵۳۹۸۱۶۳۲

∴ π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۲۸

ظاہر ہے کہ اعشاریہ کے آخری مقام میں خطا ہو سکتی ہے۔ آخری نتیجہ میں خطا کا اندازہ کرنیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}$ کی دریافت میں پانچ جگہ خطا کا امکان ہے لیکن ہر جگہ اعشاریہ کے آخری مقام میں خطا نصف اکائی سے بڑی نہیں ہو سکتی اور اسی طرح $\text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$ میں ایسی خطا دو جگہ ہو سکتی ہے۔ پس π کی دریافت شدہ قیمت میں اگر تمام خطائیں جمع بھی ہو جائیں تو یہ اعشاریہ کے آخری مقام میں ۴×(۲×۵×$\frac{1}{2}$+

$\times 2 \frac{1}{2}) = 44$ سے زیادہ نہیں ہو سکتیں۔ اس لئے اس کا اعشاریہ کے پہلے سات مقام تک اثر نہیں پڑیگا۔ نیز ہم کہہ سکتے ہیں کہ اعشاریہ کے آخری تین عدد ۴۸۴ اور ۲۷۵ کے درمیان واقع ہونگے۔

درحقیقت خطائیں سب ایک سمت میں نہیں ہیں اور π کی صحیح قیمت اعشاریہ کے دس مقامات تک یہ ہے

$$\pi = 3.1415926536$$

۱۷۷۔ قوتی سلسلوں کا استدقاق۔

دفعہ ۱۷۴ میں جو عام سوال پیش کئے گئے ہیں ان کو بحث میں لانے سے پیشتر استدقاق پر غور کرنا ضروری ہے۔ اگر کسی لا انتہا سلسلے کی حدیں متغیر لا کے تفاعل ہوں تو یہ ممکن ہے کہ کوئی سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لئے بغیر کسی رکاوٹ کے مستدق ہو جیسا کہ قوت نمائی سلسلہ کی صورت میں دیکھا گیا ہے (دفعہ ۳۷) یا یہ سلسلہ لا کی صرف ان قیمتوں کے لئے مستدق ہو جو ایک خاص متصل وسعت کے ساتھ تعلق رکھتی ہیں۔ اگر یہ احاطہ یا وسعت لا = ا سے لا = ب تک بشمول ہر دو حدود ہو تو احاطہ بند کہلاتا ہے اور اسے (ا، ب) سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر دونوں حدود کے نقطے ا اور ب احاطہ سے باہر ہوں تو احاطہ دونوں سروں پر کھلا کہلاتا ہے اور اسے [ا، ب] سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر صرف پہلے یا دوسرے حدودی نقطہ کو احاطہ سے خارج کر دیا گیا ہے تو اسے بالترتیب [ا، ب) یا (ا، ب] سے ظاہر کرتے ہیں۔* مثلاً لوگارثمی سلسلہ احاطہ [۱-، ۱) کے لئے مستدق ثابت کیا گیا ہے اور گریگوری کا سلسلہ احاطہ (۱-، ۱) میں مستدق ہے۔

$$\text{قوتی سلسلہ } \quad ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + \ldots + ا_ن لا^ن + \ldots \quad (1)$$

کی صورت میں استدقاق کی عموماً مفید ترین جانچ نسبتی جانچ ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر ارقام کی محدود تعداد کے بعد ہر رقم اور اسکی پہلی رقم کی نسبت کی مطلق قیمت کسی مقدار ک سے کم ہے جو خود ایک سے کم ہے تو سلسلہ لازماً مستدق ہوگا۔ کیونکہ ایسی صورت میں سلسلہ کی متواتر رقمیں، مشترک نسبت ک والے ہندسی سلسلہ کی رقموں کی بہ نسبت زیادہ تیزی سے گھٹتی ہیں۔ بالخصوص سلسلہ (۱) لازماً مستدق ہوگا اگر [*]

$$\lim_{ن\to\infty}\left|\frac{ا_{ن+1}}{ا_ن}\,لا\right| < 1 \quad \dots\dots\dots (۲)$$

کیونکہ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہے اور زیر غور انتہا ک ہے تو ن کو کافی بڑا لینے سے ہم اطمینان کر سکتے ہیں کہ ن کی اس اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے کسر $\left|\frac{ا_{ن+1}}{ا_ن}\,لا\right|$ کسی مقررہ مقدار ک سے (جو ک اور ایک کے درمیان ہے) کم ہے۔

اگر شرط (۲) پوری ہوتی ہے تو سلسلے

$$ا_1 + 2ا_2\,لا + 3ا_3\,لا^2 + \dots + ن\,ا_ن\,لا^{ن-1} + \dots\dots (۳)$$

اور

$$ا_0\,لا + \frac{ا_1}{2}\,لا^2 + \frac{ا_2}{3}\,لا^3 + \dots + \frac{ا_ن}{ن+1}\,لا^{ن+1} + \dots\dots (۴)$$

جنکی ارقام سلسلہ (۱) کو بالترتیب تفرق اور تکمل کرنے سے حاصل ہوئی ہیں لازماً مستدق ہونگے۔ کیونکہ (۳) کی صورت میں

$$\lim_{ن\to\infty}\left|\frac{(ن+1)\,ا_{ن+1}}{ن\,ا_ن}\,لا\right| = \lim_{ن\to\infty}\left(1+\frac{1}{ن}\right)\times\lim_{ن\to\infty}\left|\frac{ا_{ن+1}}{ا_ن}\,لا\right| = ک \quad (۵)$$

[*] جانچ کی یہ شکل ڈی لا مبرٹ کے نام سے مشہور ہے

سلسلہ (۴) کے مستدق ہونے کا ثبوت اس سے بھی زیادہ ظاہر ہے۔
نیز نسبتی جانچ سے قطع نظر کرکے صرف فرض کرو کہ سلسلہ (۱)
لا کی مخصوص قیمت عہ کے لئے مستدق ہے۔ اب چونکہ ارقام کو لا
انتہا گھٹنا چاہیئے اس لئے ضروری ہے کہ

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \left| ا_ن \text{ عہ}^ن \right| = ۰ \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ لا کی ان تمام قیمتوں کے لئے جن کے
لئے |لا| < |عہ| لازماً مستدق ہوگا کیونکہ سلسلہ ذیل کی شکل میں
لکھا جا سکتا ہے

$$ا + ا_۱ \text{ عہ} \left(\frac{\text{لا}}{\text{عہ}}\right) + ا_۲ \text{ عہ}^۲ \left(\frac{\text{لا}}{\text{عہ}}\right)^۲ + \ldots + ا_ن \text{ عہ}^ن \left(\frac{\text{لا}}{\text{عہ}}\right)^ن + \ldots (۷)$$

اب |ا_ن عہ^ن| کی بڑی سی بڑی قیمت کو م سے ظاہر کرنے سے
ہم دیکھتے ہیں کہ (۷) کی مختلف رقمیں ذیل کے مستدق ہندسی سلسلہ
کی متناظر رقموں سے مطلق قیمت میں کم ہیں

$$\text{م} \left(۱ + \text{ت} + \text{ت}^۲ + \text{ت}^۳ + \ldots + \text{ت}^ن + \ldots\right) \ldots\ldots (۸)$$

$$\text{جہاں } \text{ت} = \frac{\text{لا}}{\text{عہ}}$$

اس لئے سلسلہ (۷) بھی لازماً مستدق ہوگا۔
پس اگر سلسلہ (۱) لا کی کسی ایک قیمت (عہ) کے لئے جو صفر
نہیں ہے مستدق ہو تو یہ سلسلہ احاطہ [– عہ، عہ) میں مستدق ہوگا
اور احاطہ [– عہ، عہ] میں لازماً مستدق ہوگا۔

نیز (۶) سے ظاہر ہے کہ سلسلے (۳) اور (۴) بھی احاطہ [– عہ، عہ]
میں لازماً مستدق ہونگے کیونکہ اگر یہ مطلق قیمت میں عہ سے کم کوئی مقدار ہو تو

(۳) کی صورت میں

$$\lim_{ن\to\infty} \left| ن\, لن\, بہ^{ن-1} \right| = \frac{1}{|بہ|} \lim_{ن\to\infty} \left| لن\, عہ^{ن} \right| \times \lim_{ن\to\infty} ن \left| \frac{بہ}{عہ} \right|^{ن} \quad \dots\dots\dots (۹)$$

بائیں جانب کی دو انتہاؤں میں سے پہلی مفروضہ کی رو سے صفر ہے اور دوسری دفعہ ۳۴۴ (۳) کی بنا پر صفر ہے۔

(۴) کی صورت میں بدرجہ اولےٰ

$$\lim_{ن\to\infty} \left| \frac{لن\, عہ^{ن+1}}{ن+1} \right| = |عہ| \lim \left| \frac{لن\, عہ^{ن}}{ن+1} \right| = 0 \quad (۱۰)$$

مثال (۱) سلسلہ $1 + \frac{1}{2} لا + \frac{1\times 3}{2\times 4} لا^2 + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6} لا^3 + \dots\dots (۱۱)$

دفعہ (۵) سے لا = -۱ کے لئے مستدق ہے۔ اس لئے |لا| < ۱ کے لئے یہ لازماً مستدق ہے۔

ثابت کیا جا سکتا ہے کہ لا = ۱ کے لئے یہ متسع ہے۔ پس یہ احاطہ [-۱، ۱) میں مستدق ہے لیکن لازماً مستدق صرف احاطہ [-۱، ۱] میں ہے۔

۴۶۶

مثال (۲)۔ سلسلہ $\frac{لا}{1\times 2} + \frac{لا^2}{2\times 3} + \frac{لا^3}{3\times 4} + \dots\dots\dots (۱۲)$

جانچ (۲) کی رو سے |لا| < ۱ کے لئے مستدق ہے۔ نیز بہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ لا = ±۱ کے لئے بھی یہ مستدق ہے۔ اس لئے یہ پورے احاطے [-۱، ۱] میں مستدق ہے۔ لیکن مذکورہ بالا دلائل کی بنا پر ہم صرف اس بات کا دعوےٰ کر سکتے ہیں کہ سلسلہ

$$لا + \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{3} + \dots\dots\dots\dots (۱۳)$$

جو سلسلہ (۱۲) کو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے احاطہ [-۱، ۱) میں مستدق ہے۔ نیز دفعہ ۵ سے یہ سلسلہ لا = -۱ کے لئے مستدق ہے اور دفعہ ۵، ۱ سے

لا = ا کے لئے متسع ہے۔

۱۷۸۔ قوتی سلسلوں کا تسلسل:۔ اب فرض کرو کہ سلسلہ

$$\text{ص}(\text{لا}) = \text{ا}_{\cdot} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \ldots\ldots \quad (1)$$

احاطہ [-عہ، عہ] میں لازماً مستدق ہے۔ اگر لا اور لاَ اس احاطہ کے کوئی دو نقاط ہوں تو دفعہ ۵ (آ) اور (۳) سے

$$\text{ص}(\text{لاَ}) - \text{ص}(\text{لا}) = (\text{لاَ} - \text{لا})\Big\{\text{ا}_{1} + 2\,\text{ا}_{2}\,\frac{\text{لا}+\text{لاَ}}{2} + 3\,\text{ا}_{3}\,\frac{\text{لا}^{2}+\text{لا}\,\text{لاَ}+\text{لاَ}^{2}}{3} + \ldots$$

$$+\,\text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}+\text{لا}^{\text{ن}-2}\,\text{لاَ}+\ldots+\text{لاَ}^{\text{ن}-1}}{\text{ن}} + \ldots\Big\} \ldots \quad (2)$$

اگر لا اور لاَ کی علامت ایک ہی ہو تو کسر $\dfrac{\text{لا}^{\text{ن}-1}+\text{لا}^{\text{ن}-2}\,\text{لاَ}+\ldots+\text{لاَ}^{\text{ن}-1}}{\text{ن}}$

کی قیمت $\text{لا}^{\text{ن}-1}$ اور $\text{لاَ}^{\text{ن}-1}$ کے درمیان واقع ہوگی۔ اس لئے خطوط وحدانی { } کے اندر کی مختلف رقمیں مطلق قیمت میں ذیل کے دو سلسلوں کی متناظر رقموں کے درمیان واقع ہوتی ہیں:۔

$$\text{ا}_{1} + 2\,\text{ا}_{2}\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_{3}\,\text{لا}^{2} + \ldots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{اور}\quad \text{ا}_{1} + 2\,\text{ا}_{2}\,\text{لاَ} + 3\,\text{ا}_{3}\,\text{لاَ}^{2} + \ldots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لاَ}^{\text{ن}-1} + \ldots\ldots \quad (4)$$

یہ ثابت کر دیا گیا ہے کہ مذکورہ بالا مفروضہ پر یہ دونوں سلسلے لازماً مستدق ہیں۔ اسلئے (۲) میں { } کے درمیان کا جملہ محدود ہے پس

$$\underset{\text{لاَ}\to\text{لا}}{\text{نہا}}\ \{\text{ص}(\text{لاَ}) - \text{ص}(\text{لا})\} = 0 \quad (5)$$

یعنی احاطہ [- عہ، عہ]* میں لا کی تمام درمیانی قیمتوں کے لئے ص(لا) مسلسل ہے

اور اس سے یہ اخذ کر سکتے ہیں کہ قوتی سلسلے (۳) اور (۴) احاطہ [- عہ، عہ] میں مسلسل ہیں۔

۲۶۷ **۱۷۹ا — قوتی سلسلہ کا تفرق:** — گذشتہ دفعہ کی ترقیم کے مطابق اور اسی مفروضہ کی بنا پر

$$\frac{ص(لاَ) - ص(لا)}{لاَ - لا} = ا_۱ + ۲ ا_۲ \frac{لا + لاَ}{۲} + ۳ ا_۳ \frac{لا^۲ + لا لاَ + لاَ^۲}{۳} + \dots + ن ا_ن \frac{لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲} لاَ + \dots + لاَ^{ن-۱}}{ن} + \dots \quad (۱)$$

چونکہ آخر میں لاَ کو لا کے مساوی کرنا ہے، اسلئے ان دونوں کو ہم علامت فرض کر سکتے ہیں۔

سب سے پہلے فرض کرو کہ تمام سر $ا_ن$ مثبت ہیں اور لا بھی مثبت ہے۔ تو (۱) کے بائیں جانب کا سلسلہ قیمت کے لحاظ سے گذشتہ دفعہ کے سلسلوں (۳) اور (۴) کے درمیان واقع ہوگا اور چونکہ (۳) کا حاصل جمع لا کا مسلسل تفاعل ہے اس لئے

$$ص'(لا) = \lim_{لاَ \to لا} \frac{ص(لاَ) - ص(لا)}{لاَ - لا} = ا_۱ + ۲ ا_۲ لا + ۳ ا_۳ لا^۲ \dots + ن ا_ن لا^{ن-۱} + \dots \dots \quad (۲)$$

---

* یہ فرض ہے کہ سلسلے (۱) اور (۴) لا کا مستدق ہوں جبکہ لا سلسلہ (۱) کے احاطہ استدقاق کا حدی نقطہ ہو۔ ایسی صورت میں ہم یقینی طور پر بیان کر سکتے ہیں کہ ص(لا)، لا کی اس قیمت تک (بشمول اس قیمت کے) متصل ہے۔

اور یہ نتیجہ احاطہ [-عہ ، عہ] کے تمام نقاط کے لئے صحیح ہے -
ظاہر ہے کہ یہی نتیجہ حاصل ہو گا اگر تمام سر $ا_ن$ منفی ہوں -
اب فرض کرو کہ لا منفی ہے اور سر $ا_ن$ مثبت ہیں اس صورت میں
ص(لا) میں ایک ایک رقم چھوڑ کر جو دو ذیل کے سلسلے بنتے ہیں
ان پر مذکورہ بالا دلائل عائد ہو سکیں گے

$$ا + ا_۲ لا^۲ + ا_۴ لا^۴ + \dots + ا_{۲ن} لا^{۲ن} + \dots \dots \quad (۳)$$

$$ا_۱ لا + ا_۳ لا^۳ + ا_۵ لا^۵ + \dots + ا_{۲ن+۱} لا^{۲ن+۱} + \dots \dots \quad (۴)$$

کیونکہ (۳) کی تمام رقمیں مثبت ہیں اور (۴) کی منفی - اب ان کا مشتق تفاعل
ان سلسلوں کو بالترتیب رقم بہ رقم تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے
پس ان کو جمع کرنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہو گا کیونکہ ہر دو سلسلے لازماً
متندق ہیں -

آخرالامر اگر سر $ا_ن$ تمام ایک ہی علامت کے نہیں ہیں تو ص(لا)
کو دو ایسے سلسلوں کے حاصل جمع میں تحویل کیا جا سکتا ہے کہ ان میں
سے ایک کے تمام سر مثبت ہوں اور دوسرے کے منفی - اب مذکورہ بالا
دلائل ان میں سے ہر ایک پر عائد ہو سکتے ہیں اور اس لئے ان کے
مجموعے پر بھی عائد ہو سکیں گے -

اوپر کے بیان میں اس امر کا مشاہدہ کرنا ہو گا کہ زیر غور سلسلہ کا لازماً
متندق ہونا اوپر کے استدلال کے لئے بیحد ضروری ہے -

۴۶۸

مثال :- یہ معلوم ہے کہ $|لا| < ۱$ کے لئے

$$\frac{1}{1-لا} = 1 + لا + لا^2 + لا^3 + \dots + لا^ن + \dots \dots \quad (۵)$$

دونوں جانبوں کو تفرق کرنے سے

$$\frac{1}{(1-لا)^2} = 1 + 2لا + 3لا^2 + 4لا^3 + \dots + ن لا^{ن-1} + \dots \dots \quad (۶)$$

نیز دوبارہ تفرق کرنے سے

$$\frac{1}{(1-\text{لا})^3} = \frac{1}{2}\Big[1\times2+2\times3\,\text{لا}+3\times4\,\text{لا}^2+\ldots+\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2}+\ldots\Big] \quad (7)$$

۱۸۰ — قوتی سلسلوں کا تکمل :- دفعات ۱۷۷ - ۹ ، ۱ کی رقوم کے موافق فرض کرو کہ

$$\text{ع}(\text{لا}) = \text{ا}_{\cdot}\,\text{لا} + \text{ا}_1\frac{\text{لا}^2}{2} + \text{ا}_2\frac{\text{لا}^3}{3} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \ldots \quad (1)$$

اس مفروضہ کی بنا پر کہ ص(لا) احاطہ [- حم ، حم] میں لازماً مستدق ہے سلسلہ (۱) بھی اسی احاطہ میں لازماً مستدق ہوگا۔ پس دفعہ ۱۷۹ کی رو سے

$$\text{عَ}(\text{لا}) = \text{ا}_{\cdot} + \text{ا}_1\text{لا} + \text{ا}_2\text{لا}^2 + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} + \ldots = \text{ص}(\text{لا}) \ldots \quad (2)$$

اس لئے

$$\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{ص}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \Big[\text{ع}(\text{لا})\Big]_{\text{ب}}^{\text{لا}} = \text{ع}(\text{لا}) \ldots \quad (3)$$

مثال (۱) اگر |لا| < ۱ تو مسئلہ ثنائی (دفعہ ۱۸۲) سے

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = 1 + \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{1\times3}{2\times4}\text{لا}^4 + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\text{لا}^6 + \ldots \quad (4)$$

پس حدود صفر اور لا کے درمیان رقم بہ رقم تکمل کرنے سے

$$\text{جب}^{-1}\text{لا} = \text{لا} + \frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{\text{لا}^5}{5} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{\text{لا}^7}{7} + \ldots \quad (5)$$

یہ سلسلہ نیوٹن کا دریافت کیا ہوا ہے۔

اس میں اگر لا = ½ رکھیں تو

$$\pi = 6\Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times3\times2^3} + \frac{1\times3}{2\times4\times5\times2^5} + \ldots\Big] \quad (6)$$

جس سے π کی قیمت بہ آسانی دریافت ہو سکتی ہے۔

مثال (۲)۔ اگر $|\text{لا}| < ۱$ تو $\text{لوک}(۱+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} \ldots$ (۷)

اسکو حدود صفر اور لا کے درمیان رقم بہ رقم تکمل کرنے سے

$$(۱+\text{لا})\,\text{لوک}(۱+\text{لا}) - \text{لا} = \frac{\text{لا}^{۲}}{۱\times۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۲\times۳} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۳\times۴} \ldots\ldots \quad (۸)$$

دفعہ ۸۰ کے حاشیہ میں یہ دکھایا گیا ہے کہ بائیں جانب کا تفاعل لا = ۱ تک مسلسل ہے۔ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{۱}{۱\times۲} - \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} \ldots\ldots = ۲\,\text{لوک}\,۲ - ۱ = ۰.۳۸۶۲۹\ldots$$

۱۸۱۔ تفرقی مساوات کا حل سلسلوں کے ذریعہ۔

اگر کوئی تفرقی مساوات دی ہوئی ہو جس کے سر متبوع متغیر (لا) کے متعلق صحیح تفاعل ہوں تو صعودی قوتی سلسلہ

$$\text{ما} = \text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots + \text{ا}_{ن}\,\text{لا}^{ن} + \ldots\ldots \quad (۱)$$

کی شکل میں اکثر حل دریافت ہو سکتا ہے۔ اب اگر تھوڑی دیر کے لئے فرض کرلیا جائے کہ لا کے کسی خاص احاطہ میں سلسلہ لازماً متدق ہے تو دفعہ ۱۷۹ کے ضابطے سے یہ لا کے لحاظ سے ایک، دو... یا زیادہ دفعہ تفرق کیا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات میں سلسلہ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ مساوات پوری ہو سکتی ہے بشرطیکہ سروں $\text{ا}_{۰}، \text{ا}_{۱}، \text{ا}_{۲} \ldots\ldots$ میں چند رشتے ہوں۔

اس طریقہ پر ایک یا زیادہ اختیاری مستقل والا سلسلہ حاصل ہوجائیگا اور اگر یہ ثابت ہوجائے کہ سلسلہ لازماً متدق ہے تو یہ اس تفرقی مساوات کا ایک حل ہوگا۔ بلاشبہ یہ الگ سوال ہے کہ آیا یہ حل مکمل حل ہے یا مکمل حل بنانے کے لئے اسمیں کچھ اور اضافہ ہونا چاہئے

اس پر ابھی غور کرنا باقی ہے۔

ذیل کی مثال اہم ہے

فرض کرو کہ مساوات ہے $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} + \text{ما} = ۰$ .... (۲)

نمونہ (۱) کا حل مان کر مساوات میں اندراج سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱\times۲\,\text{ا}_۲ + \text{ا}_۰) + (۲\times۳\,\text{ا}_۳ + \text{ا}_۱)\,\text{لا} + (۳\times۴\,\text{ا}_۴ + \text{ا}_۲)\,\text{لا}^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \{(\text{ن}-۱)\,\text{ن}\,\text{ا}_\text{ن} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots = ۰ \qquad (۳)$$

یہ مساوات متماثلاً پوری ہوتی ہے بشرطیکہ

$$\text{ا}_۲ = -\frac{1}{۱\times۲}\,\text{ا}_۰ ،\quad \text{ا}_۳ = -\frac{1}{۲\times۳}\,\text{ا}_۱$$

$$\text{ا}_۴ = -\frac{1}{۳\times۴}\,\text{ا}_۲ = \frac{1}{\underline{|۴}}\,\text{ا}_۰ ،\quad \text{ا}_۵ = -\frac{1}{۴\times۵}\,\text{ا}_۳ = \frac{1}{\underline{|۵}}\,\text{ا}_۱$$

۴۷۰ اور عام طور پر

$$\left.\begin{aligned} \text{ا}_{۲\text{ن}} &= -\frac{1}{۲\text{ن}(۲\text{ن}-۱)}\,\text{ا}_{۲\text{ن}-۲} = (-۱)^{\text{ن}}\frac{1}{\underline{|۲\text{ن}}}\,\text{ا}_۰ \\ \text{اور}\quad \text{ا}_{۲\text{ن}+۱} &= -\frac{1}{۲\text{ن}(۲\text{ن}+۱)}\,\text{ا}_{۲\text{ن}-۱} = (-۱)^{\text{ن}}\frac{1}{\underline{|۲\text{ن}+۱}}\,\text{ا}_۱ \end{aligned}\right\} \ldots (۴)$$

پس حاصل ہوتا ہے کہ حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا}_۰\left(۱ - \frac{\text{لا}^2}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^4}{\underline{|۴}} - \ldots\right) + \text{ا}_۱\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^5}{\underline{|۵}} - \ldots\ldots\right) \ldots\ldots (۵)$$

بہ آسانی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ خطوط وحدانی میں کے سلسلے لا کی تمام قیمتوں کے لئے لازماً مستدق ہیں اور اس لئے ان کا حاصل جمع مسلسل ہے۔

دفعہ ۱۶۳ میں دکھایا گیا ہے کہ (۲) کا مکمل حل ہے

$$\text{و} = \text{ا جم لا} + \text{ب جب لا} \quad \ldots\ldots\ (۶)$$

پس اگر $\text{ا}_۰$ اور $\text{ا}_۱$ کی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ا اور ب کی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں کہ حلے (۵) اور (۶) متماثلاً مساوی ہوں۔
مثلاً $\text{ا}_۰ = ۱$ اور $\text{ا}_۱ = ۰$ درج کرو

تو
$$\text{ا جم لا} + \text{ب جب لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^۴}{\lfloor ۴} - \frac{\text{لا}^۶}{\lfloor ۶} + \ldots$$

لا کی علامت بدلنے سے

$$\text{ا جم لا} - \text{ب جب لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^۴}{\lfloor ۴} - \frac{\text{لا}^۶}{\lfloor ۶} + \ldots$$

پس ضروری ہے کہ ب = ۰، اب لا = ۰ رکھنے سے ا = ۱ دریافت ہوتا ہے۔
اس سے ذیل کا ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^۴}{\lfloor ۴} - \ldots\ldots\ (۷)$$

اسی طرح اگر $\text{ا}_۰ = ۰$ اور $\text{ا}_۱ = ۱$ رکھیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا} = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{ب} = ۱$$

اور اسلئے
$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{\lfloor ۳} + \frac{\text{لا}^۵}{\lfloor ۵} - \ldots\ldots\ (۸)$$

کئی وجوہات سے تفرقی مساوات کے حل کرنے کا طریقہ بالا عملی طور پر کارآمد نہیں ہے، اور یہ بھی ممکن ہے کہ اس سے نامکمل حل حاصل ہو۔
مثلاً دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کی صورت میں ممکن ہے کہ صرف ایک ہی سلسلہ حاصل ہو اور اسلئے ایک ہی اختیاری مستقل ہو۔ اس مضمون کے طبیعی اطلاقات میں اکثر ایسا ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں حل کم از کم علامات کی رقوم میں دفعہ ۱۶۶ (۳) کے طریقے سے مکمل

کیا جا سکتا ہے

۱۸۴۔ تفرقی مساوات کی مدد سے پھیلاؤ:۔

بعض اوقات گذشتہ دفعہ کا طریقہ ایک دئے ہوئے تفاعل کو قوتی سلسلہ میں پھیلانے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ ایسی مساوات مرتب ہو سکے جس کے منطق صحیح تفاعل ہوں اور جو اصلی تفاعل کے اندراج سے پوری ہو جائے۔

مثلاً فرض کرو کہ ما = (۱ + لا)^م .... (۱)

جہاں م مثبت منفی صحیح عدد یا کسر ہے۔ دونوں جانب کا لوکارثم لیکر تفرق کرنے سے

$$\frac{۱}{ما}\ \frac{فرما}{فرلا} = \frac{م}{۱+لا}$$

یعنی (۱ + لا) $\frac{فرما}{فرلا}$ − م ما = ۰ .... (۲)

اب فرض کرو کہ

ما = ا۰ + ا۱ لا + ا۲ لا^۲ + ... + ان لا^ن + ... (۳)

اس کو مساوات میں درج کرنے سے

(۱ + لا) (ا۱ + ۲ ا۲ لا + ... + ن ان لا^(ن−۱) + ...)

− م (ا۰ + ا۱ لا + ... + ان لا^ن + ...) = ۰

---

* یہ طریقہ ابتدا میں نیوٹن نے استعمال کیا تھا نیز جیب لا، جیب (لا) کے سلسلے بھی اسی نے حاصل کئے تھے اگرچہ سلسلے حاصل کرنیکا طریقہ مختلف تھا۔

یا $(ا_1 - م\, ا_0) + \{۲\, ا_2 - (م-۱)\, ا_1\}\, لا + \{۳\, ا_3 - (م-۲)\, ا_2\}\, لا^۲ + \ldots$

$$+ \{ن\, ا_ن - (م-ن+۱)\, ا_{ن-۱}\}\, لا^{ن-۱} + \ldots = ۰ \quad (۴)$$

یہ متماثلاً پوری ہوتی ہے بشرطیکہ

$$ا_1 = \frac{م}{۱}\, ا_0$$

$$ا_2 = \frac{م-۱}{۲}\, ا_1 = \frac{م(م-۱)}{۱ \times ۲}\, ا_0$$

$$ا_3 = \frac{م-۲}{۳}\, ا_2 = \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۱ \times ۲ \times ۳}\, ا_0$$

اور عام طور پر

$$ا_ن = \frac{م-ن+۱}{ن}\, ا_{ن-۱} = \frac{م(م-۱)(م-۲)\ldots(م-ن+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times ن}\, ا_0 \ldots (۵)$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = ا_0 \Big\{ ۱ + \frac{م}{۱}\, لا + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}}\, لا^۲ + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\underline{|۳}}\, لا^۳ + \ldots$$

$$+ \frac{م(م-۱)(م-۲)\ldots(م-ن+۱)}{\underline{|ن}}\, لا^ن + \ldots \Big\} \ldots (۶)$$

جو مساوات (۲) کا حل ہے۔ بہ آسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ سلسلہ $|لا| < ۱$ کے لئے مستدق ہے۔

۴۷۲ اب اگر تفرقی مساوات (۲) کے مرتب کرنے کے طریقے کو اُلٹیں تو ظاہر ہے کہ اس کا مکمل حل ہے

$$ما = ج\, (۱ + لا)^م \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔ پس (۶) اور (۷) ایک دوسرے کے معادل ہونگے اور دونوں میں لا = ۰ رکھنے سے ظاہر ہے کہ ج = ا

اسلئے $(\text{۱}+\text{لا})^{\text{م}} = \text{۱} + \frac{\text{م}}{\text{۱}}\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{۱})}{|\underline{\text{۲}}}\text{لا}^{\text{۲}} + \cdots\cdots$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}-\text{۱})\cdots(\text{م}-\text{ن}+\text{۱})}{|\underline{\text{ن}}}\text{لا}^{\text{ن}} + \cdots\cdots (\text{۸})$$

یہ پھیلاؤ $|\text{لا}| < \text{۱}$ کے لئے صحیح ہے اور یہ مسئلہ ثنائی کے نام سے مشہور ہے*

مثال ۱۔ بطور دوسری مثال کے تفاعل

$$\text{ما} = \frac{\text{جب}^{-\text{۱}}\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{۹})$$

پر غور کرو۔ $\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}$ سے ضرب دیکر تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}}\,\text{ما} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}}$$

یعنی $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا}\,\text{ما} = \text{۱} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{۱۰})$

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{ا}_{\text{۰}} + \text{ا}_{\text{۱}}\text{لا} + \text{ا}_{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} + \cdots\cdots (\text{۱۱})$

اسکو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})(\text{ا}_{\text{۱}} + \text{۲}\text{ا}_{\text{۲}}\text{لا} + \text{۳}\text{ا}_{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۲}} + \cdots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}} + \cdots)$$

$$-\text{لا}(\text{ا}_{\text{۰}} + \text{ا}_{\text{۱}}\text{لا} + \text{ا}_{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} + \cdots) = \text{۱} \cdots\cdots (\text{۱۲})$$

---

* نیوٹن (۱۶۷۶)، $\text{لا} = \pm\text{۱}$ کی صورتوں پر خاص تحقیقات کرنی ہوگی

یا $(ا_1 - ۱) + (۲ ا_۲ - ا_۰) لا + (۳ ا_۳ - ۲ ا_۱) لا^۲ + \ldots\ldots$

$+ \{ن ا_ن - (ن-۱) ا_{ن-۲}\} لا^{ن-۱} + \ldots\ldots$ (۱۳)

یہ مساوات متماثلاً پوری ہوگی بشرطیکہ

$$\left.\begin{array}{ll} ا_1 = ۱، & ا_۲ = \frac{۱}{۲} ا_۰ \\ ا_۳ = \frac{۲}{۳} ا_1 = \frac{۲}{۳}، & ا_۴ = \frac{۳}{۴} ا_۲ = \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} ا_۰ \\ ا_۵ = \frac{۴}{۵} ا_۳ = \frac{۴ \times ۲}{۵ \times ۳} & ا_۶ = \frac{۵}{۶} ا_۴ = \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} ا_۰ \\ \ldots\ldots & \end{array}\right\} \ldots (۱۴)$$

اس سے یہ حل حاصل ہوتا ہے

$$ھا = لا + \frac{۲}{۳} لا^۳ + \frac{۴ \times ۲}{۵ \times ۳} لا^۵ + \frac{۶ \times ۴ \times ۲}{۷ \times ۵ \times ۳} لا^۷ + \ldots\ldots$$

$$+ ا_۰ \left(۱ + \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} لا^۴ + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} لا^۶ + \ldots\right) \ldots (۱۵)$$

اب اگر ہم خطی مساوات (۱۰) سے جانے گئے حل کو لیں تو ظاہر ہے کہ اس کا عام حل ہوگا

$\sqrt{۱ - لا^۲}\ ھا = جب^{-۱} لا + ا \ldots\ldots\ldots$ (۱۶) *

یا $ھا = \frac{جب^{-۱} لا}{\sqrt{۱ - لا^۲}} + \frac{ا}{\sqrt{۱ - لا^۲}} \ldots\ldots\ldots$ (۱۷)

سوال کی نوعیت سے اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ (۱۵) کو تعبیر (۱۷) میں شامل ہونا چاہیے۔ اگر (۱۵) اور (۱۷) میں لا = ۰

* دفعہ ۱۵۸ امثال ۲ بھی دیکھو

رکھیں تو حاصل ہوتا ہے $\text{ا} = \text{ا}$۔ اب لا کے لئے جو دو جملے ہیں ان کے متناظراً مساوی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ

$$\frac{\text{جب}^{-1}\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{لا} + \frac{2}{3}\text{لا}^3 + \frac{4\times 2}{5\times 3}\text{لا}^5 + \ldots\ldots \quad (18)$$

اور

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = 1 + \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{3\times 1}{4\times 2}\text{لا}^4 + \ldots\ldots \quad (19)$$

دونوں سلسلے مستدق ہیں جبکہ $|\text{لا}| < 1$۔ نتیجہ (۱۹) صرف $(1-\text{لا}^2)^{-\frac{1}{2}}$ کا ثنائی پھیلاؤ ہے اب اگر لا = جب طہ رکھیں تو پہلا سلسلہ ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\text{طہ} = \text{جب طہ جم طہ}\left(1 + \frac{2}{3}\text{جب}^2\text{طہ} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\text{جب}^4\text{طہ} + \ldots\right) \quad (20)$$

نیز اگر اس میں مس طہ = ی درج کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}^{-1}\text{ی} = \frac{\text{ی}}{1+\text{ی}^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{\text{ی}^2}{1+\text{ی}^2} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{\text{ی}^2}{1+\text{ی}^2}\right)^2 + \ldots\right\} \quad (21)$$

یہ سلسلہ π کی قیمت دریافت کرنے کے لئے کئی عمدہ طریقوں کی بنا ہے مثلاً یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\pi}{4} = 5\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{7} + 2\,\text{مس}^{-1}\frac{3}{79}$$

جس سے

$$\pi = \frac{28}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$+ \frac{30336}{100000}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \ldots\right\} \ldots \quad (22)$$

یہ سلسلہ بہت جلد مستدق ہوتا ہے۔ اسکے علاوہ نسب نما میں ۱۰ کی قوتیں ہونے کی وجہ سے عددی حسابات کے لئے بہت موزوں ہے۔*

* ان سلسلوں کی تاریخ کے لئے گلیشر (Mess. of Math) جلد ۲ صفحہ ۱۱۹ سنہ ۱۸۷۳ء دیکھو

(۱۸) کو تکمل کرنے سے ایک مشہور سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲}(\text{جب}^{-۱}\text{لا})^{۲} = \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{لا}^{۴}}{۴} + \frac{۲\times۴}{۳\times۵}\,\frac{\text{لا}^{۶}}{۶} + \ldots\ldots\ldots \quad (۲۳)$$

۴۷۴

امثلہ ۵۹

(لوکارثمی سلسلے)

(۱) اگر م اور ن دو مثبت مقداریں ہوں اور ۲ ن > م > ن تو ثابت کرو کہ لوک $\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)$ کی قیمت $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}}$ اور $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہے۔

(۲) دفعہ ۱۷۵ کے سلسلے کی مدد سے ذیل کے نتیجے حاصل کرو۔

لوک ۲ = ۰،۶۹۳ ۱۴۷ ۱۸۱ ؛ لوک ۷ = ۱،۹۴۵ ۹۱۰ ۱۴۹

لوک ۳ = ۱،۰۹۸ ۶۱۲ ۲۸۹ ؛ لوک ۸ = ۲،۰۷۹ ۴۴۱ ۵۴۲

لوک ۴ = ۱،۳۸۶ ۲۹۴ ۳۶۱ ؛ لوک ۹ = ۲،۱۹۷ ۲۲۴ ۵۷۷

لوک ۵ = ۱،۶۰۹ ۴۳۷ ۹۱۲ ؛ لوک ۱۰ = ۲،۳۰۲ ۵۸۵ ۰۹۳

لوک ۶ = ۱،۷۹۱ ۷۵۹ ۴۶۹ ؛ مس = ۰،۴۳۴ ۲۹۴ ۴۸۲

(۳) ثابت کرو کہ لوک ۲ = ۷ ا − ۲ ب + ۳ ج

لوک ۳ = ۱۱ ا − ۳ ب + ۵ ج

لوک ۵ = ۱۶ ا − ۴ ب + ۷ ج

اور پھر لوک ۱۰ = ۲۳ ا − ۶ ب + ۱۰ ج

جہاں $\text{ا} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲\times۱۰^{۲}} + \frac{۱}{۳\times۱۰^{۳}} + \ldots = ۰،۱۰۵۳۶۰۵۱۵۷$

$\text{ب} = \frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۴^{۲}}{۲\times۱۰۰^{۲}} + \frac{۴^{۳}}{۳\times۱۰۰^{۳}} + \ldots = ۰،۰۴۰۸۲۱۹۹۴۵$

$$\text{ج} = \frac{۱}{۸۰} - \frac{۱}{۲\times ۸۰^{۲}} + \frac{۱}{۳\times ۸۰^{۳}} - \cdots = ۰٫۰۱۲۴۲۲۵۲۰۰$$

اسکی مدد سے لوک ۱۰ دریافت کرو۔ (Adams)

(۴) ثابت کرو کہ لوک ۲ = ۷ ٹپ + ۵ ق + ۳ ر

لوک ۳ = ۱۱ ٹپ + ۸ ق + ۵ ر

لوک ۵ = ۱۶ ٹپ + ۱۲ ق + ۷ ر

اور لوک ۱۰ = ۲۳ ٹپ + ۱۷ ق + ۱۰ ر

$$\text{جہاں ٹپ} = ۲\left(\frac{۱}{۳۱} + \frac{۱}{۳\times ۳۱^{۳}} + \frac{۱}{۵\times ۳۱^{۵}} + \cdots\right) = ۰٫۰۶۴۵۳۸۵۲۱۱$$

$$\text{ق} = ۲\left(\frac{۱}{۴۹} + \frac{۱}{۳\times ۴۹^{۳}} + \frac{۱}{۵\times ۴۹^{۵}} + \cdots\right) = ۰٫۰۴۰۸۲۱۹۹۴۵$$

$$\text{ر} = ۲\left(\frac{۱}{۱۶۱} + \frac{۱}{۳\times ۱۶۱^{۳}} + \frac{۱}{۵\times ۱۶۱^{۵}} + \cdots\right) = ۰٫۰۱۲۴۲۲۵۲۰۰$$

اِس ضابطہ کی مدد سے لوک ۱۰ کی قیمت دریافت کرو۔ (Glaisher)

۴۷۵ (۵) اگر $|\text{لا}| < ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مسنز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۵} + \cdots\cdots$$

(۶) ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left(۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲\text{ن}-۱} - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک ن}\right) = \frac{۱}{۲}\,\text{جم} + \text{لوک ۲}$$

(۷) اگر پ، ق دو مثبت مقداریں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left(\frac{۱}{\text{ن پ}} + \frac{۱}{\text{ن پ}+۱} + \frac{۱}{\text{ن پ}+۲} + \cdots + \frac{۱}{\text{ن ق}}\right) = \text{لوک}\,\frac{\text{ق}}{\text{پ}}$$

(۸) ثابت کرو کہ اگر لا مثبت ہو اور بڑا ہو تو تقریباً لوک جمز لا = لا ـ لوک ۲ + فو ۱/۲–

(۹) نیز ثابت کرو کہ تقریباً $\text{لوک مس لا} = -2\,\text{شو}^{-2\text{لا}}$

امثلہ ۹۰

(سلسلوں کا تفرق اور تکمل)

(۱) مماثلہ

$$\frac{1}{1-\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \ldots\ldots$$

کو جبکہ $|\text{لا}| < 1$ تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ اگر م مثبت صحیح عدد ہے تو

$$(1-\text{لا})^{-\text{م}} = 1 + \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}+1)}{1\times 2}\text{لا}^2 + \frac{\text{م}(\text{م}+1)(\text{م}+2)}{1\times 2\times 3}\text{لا}^3 + \ldots\ldots$$

(۲) اگر $|\text{لا}| < 1$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{1\times 2} + \frac{\text{لا}^4}{3\times 4} + \frac{\text{لا}^6}{5\times 6} + \ldots = \text{لا}\,\text{مس}^{-1}\text{لا} - \frac{1}{2}\,\text{لوک}(1+\text{لا}^2)$$

نیز دکھاؤ کہ $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = ۰٫۴۳۸۸۲\ldots$

(۳) ثابت کرو کہ اگر $|\text{لا}| < 1$ تو

$$\frac{\text{لا}^3}{1\times 3} - \frac{\text{لا}^5}{3\times 5} + \frac{\text{لا}^7}{5\times 7} - \ldots = \frac{1}{2}(1+\text{لا}^2)\,\text{مس}^{-1}\text{لا} - \frac{\text{لا}}{2}$$

(۴) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{1}{1\times 3\times 5} + \frac{1}{5\times 7\times 9} + \frac{1}{9\times 11\times 13} + \ldots\ldots$$

کا حاصل جمع ۰٫۰۷۱۳۴۹.... ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ $\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + \frac{1}{5\times 6\times 7} + \ldots = ۰٫۱۹۳۱۴۷$

۴۷۶

اور $\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{5\times6\times7}-\dots=0{,}153426\dots$

(۶) ثابت کرو کہ

$$\int_0^1 \frac{\text{لا}^{\text{م}-1}}{1+\text{لا}^{\text{ن}}}\,\text{فرلا}=\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{م}+\text{ن}}+\frac{1}{\text{م}+2\text{ن}}-\frac{1}{\text{م}+3\text{ن}}+\dots$$

(۷) ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\text{لا}} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}=\text{لا}-\frac{\text{لا}^3}{3\times3!}+\frac{\text{لا}^5}{5\times5!}-\dots$$

اور $\int_0^{\text{لا}} \frac{\text{جبز لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}=\text{لا}+\frac{\text{لا}^3}{3\times3!}+\frac{\text{لا}^5}{5\times5!}+\dots$

(۸) ثابت کرو کہ

$$\int_0^1 \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^4}}=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{1}{9}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{1}{13}+\dots$$

(۹) ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \frac{\text{ق}^{\text{لا}}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}=\text{لوگ}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}}+(\text{ب}-\text{ا})+\frac{\text{ب}^2-\text{ا}^2}{2\times2!}+\frac{\text{ب}^3-\text{ا}^3}{3\times3!}+\dots$$

(۱۰) ثابت کرو کہ

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\times3}+\frac{1}{3^2\times5}-\frac{1}{3^3\times7}+\dots\right)$$

امثلہ ۱۶

(سلسلوں کی مدد سے تفرقی مساوات کا حل)

(۱) جب لا کے سلسلے کو مانکر دائرہ کی قوس کے تقریبی طول دریافت کرنے کے لئے ہائی گن (Huyghens) کا ضابطہ ثابت کرو۔ ضابطہ یہ ہے کہ نصف قوس کے وتر کے آٹھ گنے میں سے پوری قوس کا وتر گھٹاؤ

حاصل تفریق کو تین سے تقسیم کرو۔"
نیز ثابت کرو کہ ۵۴° کی قوس کا میں، متناسب خطا ۰۰۰۰۲. میں ایک سے کم ہے

(۲) مساوات $لا \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + \frac{فر ما}{فر لا} + م ما = ۰$ کا خاص حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$ما = ا \left(۱ - \frac{م لا}{۱^۲} + \frac{م^۲ لا^۲}{۱^۲ \times ۲^۲} - \frac{م^۳ لا^۳}{۱^۲ \times ۲^۲ \times ۳^۲} + \cdots\cdots \right)$$

۴۷۷

(۳) مساوات $\frac{فر^۲ فما}{فر ر^۲} + \frac{۱}{ر} \frac{فر فما}{فر ر} + ک^۲ فما = ۰$ کا خاص حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$فما = ا \left(۱ - \frac{ک^۲ ر^۲}{۲^۲} + \frac{ک^۴ ر^۴}{۲^۲ \times ۴^۲} - \cdots\cdots \right)$$

(۴) مساوات $(۱ - لا^۲) \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - لا \frac{فر ما}{فر لا} = ۰$ کا حل سلسلہ میں دریافت کرو اور اس سے جب$^{-۱}$ لا کا پھیلاؤ حاصل کرو [دیکھو دفعہ ۱۸۰ (۵)]

(۵) ثابت کرو کہ ما = جب$^{-۱}$ لا تفرقی مساوات $(۱ + لا^۲) \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + لا \frac{فر ما}{فر لا} = ۰$ کو پورا کرتا ہے۔

پس دکھاؤ کہ $|لا| < ۱$ کے لئے

$$لوگ \left\{ لا + \sqrt{۱ + لا^۲} \right\} = لا - \frac{۱}{۲} \frac{لا^۳}{۳} + \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۴} \frac{لا^۵}{۵} - \cdots\cdots$$

(۶) مساوات $لا \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + (ع - لا) \frac{فر ما}{فر لا} - ما = ۰$ کا ایک حل

ما = ج ع کی شکل میں دریافت کرو، باب

$$\text{۶} = \text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{لا}^{2}}{\text{عہ}(\text{عہ}+\text{۱})} + \frac{\text{لا}^{3}}{\text{عہ}(\text{عہ}+\text{۱})(\text{عہ}+\text{۲})} + \dots$$

نیز ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا} \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + (\text{عہ} + \text{لا}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = \text{۰}$

رشتہ $\text{ما} = \text{ج} \; \text{قو}^{-\text{لا}} \; \text{۶}$ سے پوری ہوتی ہے۔

(۷) مساوات $\frac{\text{فر}}{\text{فرمہ}} \left\{ (\text{۱} - \text{مہ}^2) \frac{\text{فر۶}}{\text{فرمہ}} \right\} + \text{ن}(\text{ن}+\text{۱})\,\text{۶} = \text{۰}$ کا حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$\text{۶} = \text{ا}\left[\text{۱} - \frac{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})}{\lfloor \text{۲}} \text{مہ}^2 + \frac{(\text{ن}-\text{۲})\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۳})}{\lfloor \text{۴}} \text{مہ}^4 - \dots\right]$$

$$+ \text{ب}\left[\text{مہ} - \frac{(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})}{\lfloor \text{۳}} \text{مہ}^3 + \frac{(\text{ن}-\text{۳})(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})(\text{ن}+\text{۴})}{\lfloor \text{۵}} \text{مہ}^5 - \dots\dots\dots\right]$$

۴۲۸ (۸) مساوات $(\text{۱} - \text{لا}^2) \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{ن}(\text{ن}-\text{۱})\,\text{ما} = \text{۰}$ کا ایک حل سلسلہ میں دریافت کرو اور مکمل حل کے لئے علامتی جملہ لکھو۔

(۹) مساوات $\text{لا}(\text{۱}-\text{لا}) \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \left\{\text{جہ} - (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{۱})\text{لا}\right\} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{عہ}\,\text{بہ}\,\text{ما} = \text{۰}$ کا ایک حل ذیل کی شکل میں دریافت کرو

$$\text{ما} = \text{ا}\left[\text{۱} + \frac{\text{عہ}\,\text{بہ}}{\text{۱}\times\text{جہ}} \text{لا} + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+\text{۱})\text{بہ}(\text{بہ}+\text{۱})}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{جہ}(\text{جہ}+\text{۱})} \text{لا}^2 + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+\text{۱})(\text{عہ}+\text{۲})\text{بہ}(\text{بہ}+\text{۱})(\text{بہ}+\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}\times\text{جہ}(\text{جہ}+\text{۱})(\text{جہ}+\text{۲})} \text{لا}^3 + \dots\right]$$

(۱۰) مساوات $\frac{\text{فر}^2\text{فہ}}{\text{فرر}^2} + \frac{\text{۱}}{\text{ر}} \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرر}} + \left(\text{ک}^2 - \frac{\text{ن}^2}{\text{ر}^2}\right) \text{فہ} = \text{۰}$ کا ایک حل

ذیل کی شکل کا ہوگا

$$فا = ا ر^{ن}\left[١ - \frac{ک^{٢} ر^{٢}}{٢(٢ن+٢)} + \frac{ک^{٤} ر^{٤}}{٢\times٤(٢ن+٢)(٢ن+٤)} - \cdots\right]$$

(١١) مساوات $\frac{فر^{٢} ر}{فرر^{٢}} + \frac{٢(ن+١)}{ر}\frac{فر ر}{فرر} + ک^{٢} ر = ٠$ کا مکمل حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$ر = ا\left[١ - \frac{ک^{٢} ر^{٢}}{٢(٢ن+٣)} + \frac{ک^{٤} ر^{٤}}{٢\times٤(٢ن+٣)(٢ن+٥)} - \cdots\right]$$

$$+ب ر^{-٢ن-١}\left[١ - \frac{ک^{٢} ر^{٢}}{٢(١-٢ن)} + \frac{ک^{٤} ر^{٤}}{٢\times٤(١-٢ن)(٣-٢ن)} - \cdots\right]$$

(١٢) اگر ما = جب(م جب$^{-١}$لا) تو ثابت کرو کہ

$$(١-لا^{٢})\frac{فر^{٢} ما}{فرلا^{٢}} - لا\frac{فر ما}{فرلا} + م^{٢} ما = ٠$$

پس دکھاؤ کہ $\frac{جب م طہ}{م جب طہ} = ١ - \frac{م^{٢}-١}{|٣}جب^{٢}طہ + \frac{(م^{٢}-١)(م^{٢}-٣^{٢})}{|٥}جب^{٤}طہ$ ....

اور جم م طہ $= ١ - \frac{م^{٢}}{|٢}جب^{٢}طہ + \frac{م^{٢}(م^{٢}-٢^{٢})}{|٤}جب^{٤}طہ - \cdots$

(١٣) اگر لوک ما = ا جب$^{-١}$لا تو ثابت کرو کہ

$$(١-لا^{٢})\frac{فر^{٢} ما}{فرلا^{٢}} = لا\frac{فر ما}{فرلا} + ا^{٢} ما$$

نیز ما کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$$\left[ما = ١ + ا لا + \frac{ا^{٢} لا^{٢}}{|٢} + \frac{ا(ا^{٢}+١)}{|٣}لا^{٣} + \frac{ا^{٢}(ا^{٢}+٢)}{|٤}لا^{٤} + \cdots\right]$$

(۱۴) اگر $\text{ما} = \frac{\text{لوگ}(۱+\text{لا})}{(۱+\text{لا})}$ تو ثابت کرو کہ $(۱+\text{لا})^{۲}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (۱+\text{لا})\text{ما} = ۱$

پس حاصل کرو کہ $\text{ما} = \text{لا} - (۱ + \frac{۱}{۲})\text{لا}^{۲} + (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳})\text{لا}^{۳} - \dots\dots$

اور دکھاؤ کہ سلسلہ $|\text{لا}| < ۱$ کے لئے مستدق ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر $|\text{لا}| < ۱$ تو

$$(\text{مس}^{-۱}\text{لا})^{۲} = \text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۲}(۱ + \frac{۱}{۳})\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۳}(۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵})\text{لا}^{۶} \dots$$

۴۸۰

پندرھواں باب

ٹیلر کا مسئلہ

۱۸۴ — پھیلاؤ کی شکل — فرض کرو کہ ف (لا) متغیر لا کا ایسا تفاعل ہے جو خاص حدود ± عا میں، لا کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق توالی سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ دفعہ ۱۷۹ میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ مشتق تفاعل فَ (لا) اُس مشابہ سلسلے سے بیان ہوگا جو ابتدائی سلسلہ کو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور ± عا کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے یہ نتیجہ صحیح ہوگا۔

مذکورۂ بالا مسئلہ کے دوبارہ اطلاق سے، لا کی انہیں حدود میں فً (لا)، سلسلہ فَ (لا) کو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے حاصل ہوگا۔ اور اسی طرح اس سے اعلیٰ تفرقی سروں کے لئے۔

پس اگر ف (لا) = $ا_۰ + ا_۱$ لا + $ا_۲$ لا^۲ + ... + $ا_ن$ لا^ن + ...(۱)

تو

$$\left.\begin{array}{l} \text{فَ (لا)} = ا_۱ + ۲ا_۲\text{لا} + \ldots\ldots + \text{ن}\,ا_ن\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \ldots \\ \text{فً (لا)} = ۲\times۱\,ا_۲ + \ldots\ldots + \text{ن(ن-۱)}\,ا_ن\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{ف}^{(\text{ن})}\text{(لا)} = \text{ن(ن-۱)}\ldots۲\times۱\,ا_ن + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ldots(۲)$$

ان مساواتوں میں لا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا} = \text{ف}(۰)،\ \text{ا}_۱ = \text{ف}'(۰)،\ \text{ا}_۲ = \frac{\text{ف}''(۰)}{|۲} \ldots\ \text{ا}_\text{ن} = \frac{\text{ف}^{(\text{ن})}(۰)}{|\text{ن}} \ldots\ (۳)$$

جہاں علامات ف(۰)، ف'(۰)، ف''(۰)، .... اس امر کو ظاہر کرتی ہیں کہ تفرق کرنے کے بعد لا = ۰ رکھا گیا ہے۔

ابتدائی پھیلاؤ اب ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(۰) + \text{لا}\,\text{ف}'(۰) + \frac{\text{لا}^۲}{|۲}\text{ف}''(۰) + \ldots + \frac{\text{لا}^\text{ن}}{|\text{ن}}\text{ف}^{(\text{ن})}(۰) + \ldots \quad (۴)$$

ابتداً اس مسئلہ کی تحقیق میکلورن نے کی[*]۔

۴۸۱ ظاہر ہے کہ ثبوت کا ملاً اس ابتدائی مفروضہ پر مبنی ہے کہ ف(لا) مستدق قوتی سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ اس سوال پر کہ کن صورتوں میں اور کن شرائط کے ماتحت یہ پھیلاؤ ممکن ہے دفعات ۱۸۵ - ۱۹۷ میں غور کیا جائیگا۔

اگر لکھیں $\quad \text{فما}(\text{ا} + \text{لا}) = \text{ف}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots (۵)$

تو مذکورہ بالا ضابطہ کی مدد سے فما(ا + لا) کا پھیلاؤ (جب کبھی یہ ممکن ہو) قوتی سلسلہ میں دریافت کر سکتے ہیں۔

کیونکہ تھوڑی دیر کے لئے فرض کرو کہ $\quad \text{ع} = \text{ا} + \text{لا}$

تو $\quad \text{ف}(\text{لا}) = \text{فما}(\text{ع})$

$$\text{ف}'(\text{لا}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\,\text{فما}(\text{ع}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرع}}\,\text{فما}(\text{ع}) \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{فما}'(\text{ع})$$

$$\text{ف}''(\text{لا}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\,\text{فما}'(\text{ع}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرع}}\,\text{فما}'(\text{ع}) \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{فما}''(\text{ع})$$

---

[*] (Treatise on Fluxions) (1742) یہ مسئلہ اس سے پہلے سٹرلنگ کی نگاہ میں آیا تھا

اور علیٰ ہذا القیاس دیکھو دفعہ ۱۳۲ (آ)۔ پس لا = ۰ یعنی ع = ا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

ف(۰) = فما(ا)، فَ(۰) = فمَا(ا)، فً(۰) = فماً(ا)، .....،

ف^(ن)(۰) = فما^(ن)(ا)..... (۶)

اس لئے مساوات (۴) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

فما(ا+لا) = فما(ا) + لا فمَا(ا) + $\frac{\text{لا}^2}{2\times1}$ فماً(ا) + ... + $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}}$ فما^(ن)(ا) + ... (۷)

یہ ٹیلر* کا مسئلہ کہلاتا ہے۔ ہم نے اسے میلکورن کے مسئلہ سے حاصل کیا ہے۔ دراصل دونوں مسائل ایک ہی نتیجہ کی دو مختلف شکلیں ہیں۔ پس اگر (۷) کو صحیح مان لیا جائے تو میلکورن کا پھیلاؤ ا = ۰† رکھنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۱۸۴۔ خاص صورتیں۔ گذشتہ دفعہ میں مذکورہ سوال پر اصولی طور پر غور کرنے سے پہلے طالب علم کے لئے زیادہ مناسب ہوگا کہ وہ سلسلہ بنانے کے طریقے سے پوری واقفیت حاصل کرے۔ ذیل کی مثالوں میں ابتدا ہی سے فرض کر لیا جاتا ہے کہ پھیلانا ممکن ہے اور اس لئے ظاہر ہے کہ اس طریقے سے حاصل شدہ نتائج کو ثابت کیا ہوا نہیں مانا جا سکتا۔

(آ) اگر فما(ا) = ا^م .... (۱)

تو فمَا(ا) = م ا^(م-۱)، فماً(ا) = م(م-۱) ا^(م-۲) ......

* ذرا مختلف شکل میں یہ نتیجہ کتاب (Methodus Incrementorum 1716) میں محدود فرقوں کے مسئلہ کی فرع کے طور پر دیا گیا تھا۔

† میلکورن نے اپنے ضابطہ (۴) اور ٹیلر کے مسئلہ کی مماثلت کا پورا اعتراف کر لیا تھا۔

$$\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{ا}) = \text{م}(\text{م}-۱)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)\,\text{ا}^{\text{م}-\text{ن}} \qquad \ldots\ldots(۲)$$

۴۸۳ اب ٹیلر کے ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{ا}+\text{لا})^{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{ا}^{\text{م}-۱}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۱\times۲}\,\text{ا}^{\text{م}-۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}-۱)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)}{۱\times۲\times\ldots\times\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{م}-\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \ldots \qquad (۳)$$

یہ پھیلاؤ مسئلہ ثنائی کے نام سے مشہور ہے۔

ٹیلر کا ضابطہ ہر صورت میں بغیر شروط کے صحیح نہیں ہے۔ یہ امر اس بات سے بھی واضح ہے کہ نتیجہ (۳) کی بائیں جانب کا سلسلہ $|\text{لا}| > \text{ا}$ کے لئے متفرع ہے اگرچہ $|\text{لا}| < \text{ا}$ کے لئے وہ مستدق ہے تاہم دفعہ ۱۸۳ کی تحقیقات کی بناء پر اس کے حاصل جمع کو $(\text{ا}+\text{لا})^{\text{م}}$ * کے مساوی جائز سمجھنا مناسب نہ ہوگا۔ اس امر کا صحیح ثبوت دفعہ ۱۸۲ میں دیا گیا ہے۔

(۲) دفعہ ۶۳ میں قوت نما تفاعل ق(لا) کی تعریف مساوات

$$\text{ف}'(\text{لا}) = \text{ف}(\text{لا}) \qquad \ldots\ldots(۴)$$

کے ایسے حل سے کی گئی تھی جو لا = ۰ کے لئے ایک کے مساوی ہے۔ اس سے فوراً حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{لا}) \qquad \ldots\ldots(۵)$$

پس

$$\text{ف}(۰) = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ف}^{(\text{ن})}(۰) = ۱ \qquad \ldots\ldots(۶)$$

اس لئے میکلورن کے پھیلاؤ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ق}(\text{لا}) = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۱\times۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۱\times۲\times۳} + \ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} + \ldots \qquad (۷)$$

(۳) فرض کرو کہ

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{جم}\,\text{لا} \qquad \ldots\ldots(۸)$$

* فی الواقعی ایسی صورتیں ملتی ہیں جنہیں ٹیلر کا پھیلاؤ مستدق ہوتا ہے حالانکہ حاصل جمع $(\text{ا}+\text{لا})^{\text{م}}$ کے مساوی نہیں ہوتا۔

دفعہ ۶۴ میں ثابت کیا گیا تھا کہ

$$\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن}\pi}{2}\right)$$

اس لئے $\text{ف}(0) = 1$، $\text{ف}^{(\text{ن})}(0) = \text{جم}\,\frac{\text{ن}\pi}{2}$ ......(۹)

پس $\text{ف}^{(\text{ن})}(0)$ صفر ہوگا جبکہ ن طاق ہے اور ±۱ کے مساوی ہوگا جبکہ ن جفت ہے اس میں مثبت یا منفی کی علامت $\frac{\text{ن}}{2}$ کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہوگی۔

میکلورن کے ضابطہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جم}\,\text{لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{|\underline{2}} + \frac{\text{لا}^4}{|\underline{4}} - \cdots + (-1)^{\text{ن}}\frac{\text{لا}^{2\text{ن}}}{|\underline{2\text{ن}}} + \cdots \quad (۱۰)$$

(۴) فرض کرو کہ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{جب}\,\text{لا}$

اس لئے $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن}\pi}{2}\right)$ ......(۱۱)

اور $\text{ف}(0) = 0$، $\text{ف}^{(\text{ن})}(0) = \text{جب}\,\frac{\text{ن}\pi}{2} = \text{جب}\left\{\frac{\text{ن}-1}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

......(۱۲)

۴۸۳

پس $\text{ف}^{(\text{ن})}(0)$ صفر ہوگا جبکہ ن جفت ہے اور ±۱ کے مساوی ہوگا جبکہ ن طاق ہے نیز مثبت یا منفی کی علامت $\frac{\text{ن}-1}{2}$ کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہوگی۔ اس لئے میکلورن کے ضابطے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جب}\,\text{لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{|\underline{3}} + \frac{\text{لا}^5}{|\underline{5}} - \cdots + (-1)^{\text{ن}}\frac{\text{لا}^{2\text{ن}+1}}{|\underline{2\text{ن}+1}} + \cdots \quad (۱۳)$$

نتائج (۱۰) اور (۱۳) دفعہ (۱۸۱) میں باقاعدہ طور پر ثابت کئے جا چکے ہیں۔

(۵) فرض کرو کہ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لوگ}(1 + \text{لا})$ ......(۱۴)

اسلئے $ف'(لا) = \frac{1}{1+لا}$ اور ن > ۱ کیلئے $ف^{(ن)}(لا) = \frac{(-1)^{ن-1} \lfloor ن-1}{(1+لا)^{ن}}$

پس $ف(0) = 0$، $ف'(0) = 1$ اور ن > ۱ کیلئے $ف^{(ن)}(0) = (-1)^{ن-1} \lfloor ن-1$ .. (۱۵)

میکلورن کے ضابطے میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$لوک(1+لا) = لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{3} - \dots + (-1)^{ن-1}\frac{لا^{ن}}{ن} + \dots \quad (16)$$

دفعہ ۱۷۵ دیکھو۔

جب کبھی دئے ہوئے تفاعل کے ن ویں مشتق کے لئے عام ضابطہ معلوم نہ ہو تو ایسی صورت میں متواتر مشتقات حسب ضرورت دریافت کر لینے چاہئیں۔ بعض اوقات حسب ضرورت حل کی آخری سطر میں ایسی رقموں کو نظر انداز کرنے سے مجمل کی جا سکتی ہیں جن رقموں سے آخری نتیجہ میں کچھ حاصل نہیں ہوتا۔

مثال - مس لا کو $لا^5$ تک پھیلاؤ۔

$ف(لا) = مس(لا)$

رکھنے سے بالترتیب حاصل ہوتا ہے کہ

$ف'(لا) = 1 + مس^2 لا$

$ف''(لا) = 2 مس لا قط^2 لا = 2 مس لا + 2 مس^3 لا$

$ف'''(لا) = (2 + 6 مس^2 لا) قط^2 لا = 2 + 8 مس^2 لا + 6 مس^4 لا$

$ف^{(4)}(لا) = (16 مس لا + 24 مس^3 لا) قط^2 لا$

$= 16 مس لا + 40 مس^3 لا + 24 مس^5 لا$

$ف^{(5)}(لا) = (16 + 120 مس^2 لا + 120 مس^4 لا) قط^2 لا$

$= 16 + 136 مس^2 لا + 240 مس^4 لا + 120 مس^6 لا$

$ف^{(6)}(لا) = 272 مس لا قط^2 لا +$ وغیرہ وغیرہ

$ف^{(7)}(لا) = 272 قط^4 لا + \dots\dots\dots\dots$

آخری دو سطروں میں وہ رقمیں چھوڑ دی گئی ہیں جن سے ف(ن)(٠) کی قیمت میں کچھ فرق نہیں آئیگا۔

پس ف(٠) = ٠ ، ف′(٠) = ١
ف″(٠) = ٠ ، ف‴(٠) = ٢
ف(۴)(٠) = ٠ ، ف(۵)(٠) = ١٦
ف(۶)(٠) = ٠ ، ف(۷)(٠) = ٢٧٢

اور پھیلاؤ ہوگا

$$مس\ لا = لا + \frac{٢\ لا^{٣}}{\lfloor ٣} + \frac{١٦\ لا^{۵}}{\lfloor ۵} + \frac{٢٧٢\ لا^{٧}}{\lfloor ٧} + \cdots\cdots$$

$$= لا + \frac{لا^{٣}}{٣} + \frac{٢\ لا^{۵}}{١۵} + \frac{١٧\ لا^{٧}}{٣١۵} + \cdots\cdots \quad (١٧)$$

پھیلاؤ میں صرف طاق قوتیں واقع ہوتی ہیں ۔ یہ امر اِس بات سے بھی واضح ہے کہ مس لا کی علامت لا کے ساتھ بدلتی ہے ۔

١٨۵ ۔ میکلورن اور ٹیلر کے مسائل کا ثبوت ۔ ن قوتوں کے بعد باقی

فرض کرو کہ ف(لا) اور اِس کے پہلے (ن-١) مشتق متغیر لا کے مسلسل تفاعل ہیں جبکہ لا حدود صفر اور ط کے درمیان بشمول طرفین واقع ہے اب فرض کرو کہ

$$ف(لا) = ف_ن(لا) + ب_ن(لا) \quad \ldots(١)$$

جہاں $ف_ن(لا) = ف(٠) + لا\ ف′(٠) + \frac{لا^{٢}}{\lfloor ٢} ف″(٠) + \cdots$

$$+ \frac{لا^{ن-١}}{\lfloor ن-١} ف^{(ن-١)}(٠) \quad \ldots(٢)$$

یعنی $ف_ن(لا)$ میکلورن کے پھیلاؤ کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع ہے اور $ب_ن(لا)$ فی الحال تفاعلات ف(لا) اور $ف_ن(لا)$ کے فرق کیلئے

(خواہ وہ کچھ ہی ہو) صرف ایک علامت ہے میکلورن کے سلسلہ کی بابت تحقیقات میں یہ کوشش کی جاتی ہے کہ حتی الامکان ت$_ن$ (لا) کی قیمت کے حدود دریافت کئے جائیں۔ بالفاظ دیگر ف (لا) کی بجائے میکلورن کے پھیلاؤ کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع لینے میں جو خطا پیدا ہوتی ہے اسکے حدود دریافت کئے جائیں۔ اگر کسی دئے ہوئے سوال میں ہم ثابت کردیں کہ ن کو کافی بڑا لینے سے ایسا مقام حاصل ہو سکتا ہے کہ اس کے بعد ت$_ن$ (لا) کی قیمت کسی دی ہوئی مقدار سے (خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہو) ہمیشہ کم ہوگی تو ایسی صورت میں میکلورن کا سلسلہ لازماً مستدق ہوگا اور اس لاانتہا سلسلہ کا حاصل جمع ف (لا) ہوگا۔ ظاہر ہے کہ مذکورۂ بالا دلیل سے یہی نتیجہ اخذ نہیں ہو سکتا اگر حدود کے اندر لا کی کسی قیمت کیلئے ف (لا) یا اسکا کوئی مشتق غیر مسلسل ہو۔

تفاعل ف (لا) کو کسی معینہ درجہ کے منطق صحیح تفاعل سے

$$\text{یعنی}\quad ا_{\cdot} + ا_1\,لا + ا_2\,لا^2 + \cdots + ا_{ن-1}\,لا^{ن-1} \quad \cdots (۳)$$

سے تقریبی طور پر ظاہر کرنیکا تخیل دفعہ ۱۱۴ میں کام میں لایا جا چکا ہے۔ اس دفعہ میں ذیل کا طریقہ استعمال کیا گیا تھا۔ ن مستقلات $ا_{\cdot}$، $ا_1$، $ا_2$ ...$ا_{ن-1}$ کی قیمتیں ان شرائط سے دریافت کی گئی تھیں کہ حد و کو مساوی وقفوں پر تقسیم کرنے والی لا کی ن قیمتوں کے لئے (۳) کا حاصل جمع ف (لا) کے مساوی ہو۔ موجودہ صورت میں، لا کی ن قیمتیں، انتہائی حالت میں صفر پر منطبق ہو جاتی ہیں۔ یعنی بالفاظ دیگر مستقلات ان شرائط سے دریافت کئے جاتے ہیں کہ (۳) اور اس کے پہلے (ن-۱) مشتق بالترتیب، ف (لا) اور اس کے پہلے (ن-۱) مشتقات کے مساوی ہیں جبکہ لا کو خاص قیمت صفر دی جائے۔ اس تحقیق کا نتیجہ دفعہ ۱۸۳ کی رو سے تفاعل فن (لا) ہے۔

۷۸۵

ترسیمی نقطۂ نظر سے، ایسا مکافی منحنی ما = فن (لا) دریافت کیا جاتا ہے

کہ نقطہ لا = ۰ پر دئے ہوئے منحنی ما = ف (لا) سے اس کا (ن - ۱) رتبہ کا (دیکھو دفعہ ۱۶۹) تماس ہو۔ اب سوال یہ ہے کہ ایک خاص وسعت کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے، ایک منحنی کے ممکن ہٹاؤ کے حدود، دوسرے منحنی سے دریافت کئے جائیں، اس ہٹاؤ کا تعین منحنیوں کے معینوں کے فرق سے کیا جاتا ہے۔ شکل ۱۳۶ میں اس امر کی توضیح کی گئی ہے موٹی لکیر سے منحنی ما = لوک (۱ + لا) کی ترسیم دکھائی گئی ہے اور باریک لکیروں سے ذیل کے "تقریبی منحنی" دکھائے گئے ہیں۔

شکل (۱۳۶)

$$\text{ما} = \text{لا}\text{ ، }\text{ما} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\text{ ، }\text{ما} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\text{ ، }\ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

جو لوگارتمی سلسلہ [دفعہ ۱۸۴ (۱۶)] کی ۱، ۲، ۳، ..... رتبوں سے لینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ نقطوں والے خط لا = ۱ ± کو ظاہر کرتے ہیں اور اس لئے یہ لوگارتمی سلسلے کے حدود استدقاق کی نشان دہی کرتے ہیں۔

جن شرائط کو فا (لا) پورا کرتا ہے ان سے ظاہر ہے کہ جب (لا) اور اس کے پہلے (ن - ۱) مشتق لا = ۰ سے لا = ھ تک کے لئے مسلسل ہیں اور لا = ۰ کے لئے صفر ہو جاتے ہیں۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ کوئی تفاعل جو ان شرائط کو پورا کرے اور جس کا ن واں مشتق محدود ہو لازماً

ا۱ لا^ن/[ن] اور ا۲ لا^ن/[ن] کے درمیان واقع ہوگا جہاں ا۱ اور ا۲ وقفہ صفر سے ھ میں ن ویں مشتق کی قیمت کی نچلی اور اوپر کی حدود ہیں۔

کیونکہ فرض کرو کہ فا (لا) ایسا تفاعل ہے تو مفروضہ کی رو سے

$$\text{فا}(۰) = ۰،\ \text{فا}'(۰) = ۰،\ \text{فا}''(۰) = ۰، \ldots\ldots \text{فا}^{(ن-۱)}(۰) = ۰، \ldots (۶)$$

$$\text{اور}\quad ا_۱ < \text{فا}^{(ن)}(\text{لا}) < ا_۲ \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

موخرالذکر شرط لا = ۰ اور لا = ھ کے درمیان کی قیمتوں کے لئے صحیح ہے اس لئے نتیجہ (۷) سے مطابق دفعہ ۹۱ (۳) حاصل ہوتا ہے

$$\int_۰^{\text{لا}} ا_۱\, \text{فرلا} < \int_۰^{\text{لا}} \text{فا}^{(ن)}(\text{لا})\, \text{فرلا} < \int_۰^{\text{لا}} ا_۲\, \text{فرلا}\ ^{*}$$

اور چونکہ $\text{فا}^{(ن-۱)}(۰) = ۰$، اس لئے $ا_۱ \text{لا} < \text{فا}^{(ن-۱)}(\text{لا}) < ا_۲ \text{لا} \ldots (۱)$

مذکورہ بالا مسئلہ کے مکرر استعمال سے ظاہر ہے کہ

---

* بشرطیکہ لا مثبت ہو۔ اگر لا منفی ہو تو نامساوات کو الٹ دینا ہوگا لیکن آخری نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑیگا

$$\int_{\text{٠}}^{\text{لا}} \text{ا}_1 \text{لا فرلا} < \int_{\text{٠}}^{\text{لا}} \text{فا}^{(\text{ن}-1)}(\text{لا}) \text{فرلا} < \int_{\text{٠}}^{\text{لا}} \text{ا}_2 \text{لا فرلا}$$

اور چونکہ $\text{فا}^{(\text{ن}-2)}(0) = 0$

اس لئے

$$\text{ا}_1 \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} < \text{فا}^{(\text{ن}-2)}(\text{لا}) < \text{ا}_2 \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} \quad \ldots\ldots (9)$$

اسی قسم کی دلیل سے حاصل ہو سکتا ہے کہ

$$\text{ا}_1 \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} < \text{فا}^{(\text{ن}-3)}(\text{لا}) < \text{ا}_2 \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} \quad \ldots\ldots (10)$$

اور اسی طرح دیگر نتیجے حاصل کئے جا سکتے ہیں حتیٰ کہ ہم ذیل کے نتیجے پہ پہنچتے ہیں۔

$$\text{ا}_1 \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} < \text{فا}(\text{لا}) < \text{ا}_2 \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} \quad \ldots\ldots (11)$$

پس ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{فا}(\text{لا}) = \text{ج} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} \quad \ldots\ldots (12)$$

جہاں ج کوئی مقدار ا_1 اور ا_2 کے درمیان ہے۔

موجودہ اطلاق میں چونکہ $\text{فب}(\text{لا})$ درجہ (ن-١) کا منطوق صحیح تفاعل ہے اس لئے اسکا ن-واں مشتق دفعہ ۴۲ کی رو سے صفر ہوگا اور اس لئے

$\text{ب}(\text{لا})$ کا ن-واں مشتق نتیجہ (١) سے $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})$ کے مساوی ہوگا بشرطیکہ آخر الذکر مشتق وجود رکھتا ہو۔

اس سے اخذ ہوتا ہے کہ

$$\text{ب}(\text{لا}) = \text{ج} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} \quad \ldots\ldots (13)$$

جہاں ج دفعہ صفر سے ھ میں مشتق $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})$ کی بڑی سے بڑی

قیمت اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت کے درمیان واقع ہے ۔ اور اب ہم فرض کرتے ہیں کہ ف^{ن} (لا) وقفہ لا = ۰ سے لا = ھ کے درمیان مسلسل ہے اس لئے صفر اور ھ کے درمیان لا کی ایک ایسی قیمت ضرور ہوگی کہ ف$^{(ن)}$ (لا) = ج ۔ اگر اس قیمت کو ھ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ب}_{ن} (\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{ن}}{\underline{|ن}} \text{ف}^{(ن)} (\text{طھ ھ}) \quad \ldots \ldots (۱۴)$$

جہاں طھ کی قیمت کے بارے میں ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ یہ صفر اور ایک کے درمیان ہے ۔

نتیجہ (۱۴) لا = ۰ اور لا = ھ کے وقفہ میں شمول طرفین صحیح ہے اور اسمیں لا = ھ درج کرکے ف (لا) اور ب$_{ن}$ (لا) کی قیمتیں (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف} (\text{ھ}) = \text{ف} (۰) + \text{ھ} \, \text{ف}' (۰) + \frac{\text{ھ}^۲}{\underline{|۲}} \text{ف}'' (۰) + \ldots \ldots$$

$$+ \frac{\text{ھ}^{ن-۱}}{\underline{|ن-۱}} \text{ف}^{(ن-۱)} (۰) + \frac{\text{ھ}^{ن}}{\underline{|ن}} \text{ف}^{(ن)} (\text{طھ ھ}) \quad (۱۵)$$

اس شکل میں مسئلہ میکلورن بالکل ٹھیک ہے ۔ اسمیں مفروضہ یہ ہے کہ ف (لا) اور اس کے ن ۔ ویں مشتق تک تمام مشتق وقفہ صفر اور ھ کے درمیان مسلسل ہیں ۔ لیکن ان شرائط میں کہ ف^{ن} (لا) وجود رکھتا ہو اور پورے وقفہ میں مسلسل ہو باقی تمام شرائط شامل ہیں ۔

اگر ہم لکھیں کہ ف (لا) = فہ (ا + لا) $\ldots \ldots \ldots$ (۱۶)

تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فہ} (\text{ا} + \text{ھ}) = \text{فہ} (\text{ا}) + \text{ھ} \, \text{فہ}' (\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^۲}{\underline{|۲}} \text{فہ}'' (\text{ا}) + \ldots$$

$$+\frac{ھ^{ن-۱}}{|ن-۱}\ فہ^{(ن-۱)}(ا)+\frac{ھ^{ن}}{|ن}\ فہ^{(ن)}(ا+طہ ھ)\quad (۱۷)$$

۴۸۸

جہاں پہلے کی طرح ۱ > طہ > ۰

یہ مسئلہ ٹیلر کی صحیح شکل ہے۔ اِس مسئلہ میں یہ مان لیا گیا ہے کہ فہ^(ن) (لا) وقفہ لا = ا اور لا = ا + ھ میں بشمول طرفین وجود رکھتا ہے اور مسلسل ہے۔

نتائج (۱۵) اور (۱۶) میں آخری رقمیں بالترتیب میکلورن اور ٹیلر کے مسائل میں لگرانج کی باقی کی شکلیں کہلاتی ہیں۔ اِس کتاب میں چند ایسے نتائج حاصل کئے گئے ہیں جن کی عام شکل ضابطہ (۱۷) ہے۔

مثلاً ن = ۱ رکھنے سے

$$فہ(ا+ھ)=فہ(ا)+ھ\ فہ'(ا+طہ ھ)\ \dots\dots (۱۸)$$

اور ن = ۲ رکھنے سے

$$فہ(ا+ھ)=فہ(ا)+ھ\ فہ'(ا)+\frac{ھ^{۲}}{۲}\ فہ''(ا+طہ ھ)$$

$$\dots\dots (۱۹)$$

اور یہ بالترتیب دفعہ ۵۶ (۹) اور دفعہ ... (۲۲) کے مطابق ہیں۔

۱۸۶ — متبادل ثبوت۔

ٹیلر (یا میکلورن) کے مسئلہ کا ثبوت جو کہ دیا جاتا ہے وہ دفعہ (۳) کے طرز ثبوت سے مشابہ ہوتا ہے۔ ... دئے ہوئے منحنی

$$ما = ف(لا)\ \dots\dots\dots (۱)$$

کا متقابلہ منحنی

$$ما = ا_۰+ا_۱ لا+ا_۲ لا^{۲}+\dots+ا_{ن-۱} لا^{ن-۱}+ا_ن لا^{ن}\ \dots (۲)$$

سے کیا جاتا ہے۔ یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ دوسرے منحنی کے (ن+۱) اسر اِس شرط سے دریافت کئے جاتے ہیں کہ دو نوں منحنی نقاط لا = ۰ اور لا = ھ پر

ایکدوسرے کو قطع کرتے ہیں، نیز نقطہ لا = ۰ پر دونوں منحنیوں کے مشتقات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} ،\ \frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2} ،\ \ldots\ldots\ \frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-1}}$$

کی قیمتیں مساوی ہیں ۔ اِن شرائط سے پہلے نتیجہ کے مطابق حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}_0 = \text{ف}(0) ،\ \text{ا}_1 = \text{ف}'(0) ،\ \text{ا}_2 = \frac{1}{\lfloor 2}\text{ف}''(0) ،\ \ldots\ldots$$

$$\text{ا}_{\text{ن}-1} = \frac{1}{\lfloor \text{ن}-1}\text{ف}^{(\text{ن}-1)}(0) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{اور}\quad \text{ف(ھ)} = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{ھ} + \text{ا}_2\text{ھ}^2 + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ھ}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_\text{ن}\text{ھ}^\text{ن} \ldots\ldots (4)$$

اِس آخری مساوات سے $\text{ا}_\text{ن}$ کی قیمت دریافت ہوسکتی ہے ۔

اگر فا(لا) سے دونوں منحنیوں کے معینوں کا فرق تعبیر کیا جائے تو ظاہر ہے کہ

$$\text{فا}(0) = 0 ،\ \text{فا}'(0) = 0 ،\ \text{فا}''(0) = 0 \ldots\ \text{فا}^{(\text{ن}-1)}(0) = 0 \ldots (5)$$

$$\text{اور}\quad \text{فا(ھ)} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

چونکہ فا(لا) صفر ہے جبکہ لا = ۰ اور لا = ھ اِس لئے ظاہر ہے کہ مناسب شرائط کے زیر عمل فا'(لا) بھی صفر اور ھ کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔ فرض کرو کہ یہ قیمت $\text{لا} = \text{طہ}_1\text{ھ}$ ہے جہاں $1 > \text{طہ}_1 > 0$ ۔

نیز چونکہ فا'(لا) صفر ہے جبکہ لا = ۰ اور $\text{لا} = \text{طہ}_1\text{ھ}$، فا''(لا) صفر ہوگا لا کی ایک ایسی قیمت کے لئے جو صفر اور $\text{طہ}_1\text{ھ}$ کے درمیان واقع ہے، فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{طہ}_2\text{ھ}$ جہاں $\text{طہ}_1 > \text{طہ}_2 > 0$ ۔

اسی طرح عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ $\text{فا}^{(\text{ن}-1)}(\text{لا})$ صفر ہوگا جبکہ

۴۸۹

$ㅤ$لا = ، اور لا = طہ~ن-۱~ ھ جہاں ۱ > طہ~ن-۱~ > ۰

پس فا^(ن)^ (طہ ھ) = ۰ .... (۷)

جہاں ۱ > طہ > ۰

اب (۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ

فا^(ن)^ (لا) = ف^(ن)^ (لا) − |ن ا~ن~ .... (۸)

اس لئے (۷) کو استعمال کرنے سے

ا~ن~ = ۱/|ن ف^(ن)^ (طہ ھ) .... (۹)

اس لئے (۳) اور (۹) کو (۴) میں درج کرنے سے پہلے کی طرح حاصل ہوتا ہے

ف (ھ) = ف (۰) + ھ فَ (۰) + ھ^۲^/|۲ فً (۰) + ...

+ ھ^ن-۱^/|ن-۱ ف^(ن-۱)^ (۰) + ھ^ن^/|ن ف^(ن)^ (طہ ھ) ... (۱۰)

اس مسئلہ کی صداقت کے شرائط وہی ہیں جو دفعہ ۱۸۵ میں نتیجہ (۱۵) کے بعد درج کئے گئے ہیں۔*

۱۸۷ — کوشی (Cauchy) کی باقی کی شکل ۔

ن رقموں کے بعد باقی کی رقم کو دوسری شکل میں ذیل کے طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے ۔

---

* مذکورہ بالا ثبوت کا زیادہ تر حصہ وہی ہے جو ہومرشیام کاکس (Homersham Cox) نے کیمبرج اور ڈبلن کے رسالہ ریاضی (Cam. and Dub. Math. Journ) سنہ ۱۸۵۱ء میں دیا تھا

اگر فا(لا) پر ذیل کی شرائط عائد ہوں یعنی

$$\text{فا}(۰)=۰،\ \text{فاَ}(۰)=۰، \ldots\ \text{فا}^{(\text{ن}-۱)}(۰)=۰ \ldots\ldots (۱)$$

تو تکمل بالحصص سے

$$\int_{۰}^{\text{ھ}} \left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{\text{ن}-۱} \text{فا}^{(\text{ن})}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \left[\left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{\text{ن}-۱} \text{فا}^{(\text{ن}-۱)}(\text{لا})\right]_{۰}^{\text{ھ}}$$

$$+\frac{(\text{ن}-۱)}{\text{ھ}}\int_{۰}^{\text{ھ}} \left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{\text{ن}-۲} \text{فا}^{(\text{ن}-۱)}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \frac{(\text{ن}-۱)}{\text{ھ}}\int_{۰}^{\text{ھ}} \left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{\text{ن}-۲} \text{فا}^{(\text{ن}-۱)}(\text{لا})\,\text{فرلا} \ldots\ldots (۲)$$

کیونکہ تکمل شدہ رقم دونوں حدود پر صفر ہے۔ اِس عمل کو (ن-۱) مرتبہ استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{۰}^{\text{ھ}} \left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{\text{ن}-۱} \text{فا}^{(\text{ن})}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \frac{\underline{|\text{ن}-۱}}{\text{ھ}^{\text{ن}-۱}}\int_{۰}^{\text{ھ}} \text{فاَ}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \frac{\underline{|\text{ن}-۱}}{\text{ھ}^{\text{ن}-۱}}\,\text{فا}(\text{ھ})$$

یعنی

$$\text{فا}(\text{ھ}) = \frac{\text{ھ}^{\text{ن}-۱}}{\underline{|\text{ن}-۱}}\int_{۰}^{\text{ھ}} \left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{\text{ن}-۱} \text{فا}^{(\text{ن})}(\text{لا})\,\text{فرلا} \ldots\ldots (۳)$$

اور چونکہ تکمل مسلسل ہے اس لئے دفعہ ۱۹ (۳) سے ظاہر ہوتا ہے کہ

۴۹۰

$$\text{فا}(\text{ھ}) = \frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-۱}}(۱-\text{ط})^{\text{ن}-۱}\,\text{فا}^{(\text{ن})}(\text{ط ھ}) \ldots\ldots (۴)$$

جہاں ۱ > ط > ۰

اِس سے ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۸۵ نتیجہ (۵) کی آخری رقم کی بجائے ذیل کی رقم لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-۱}}(۱-\text{ط})^{\text{ن}-۱}\,\text{فا}^{(\text{ن})}(\text{ط ھ}) \ldots\ldots (۵)$$

اور نتیجہ (۷) کی آخری رقم کی بجائے ذیل کی رقم لکھی جا سکتی ہے

$\frac{ھ^ن}{|ن-۱}$ (۱-طھ)$^{ن-۱}$ فہ$^{(ن)}$ (۱+طہ ھ) ..... (۶)

باقی کی رقم کی یہ شکلیں ابتداً میں کوشی نے حاصل کیں۔

۱۸۸۔ بعض پھیلاؤ:۔ اب ہم ف (لا) یا فہ(لا) کی مختلف صورتوں میں، باقی کی رقم کی قیمت دریافت کرینگے۔ اور بالخصوص اُن شرائط پر غور کرینگے جنکے ماتحت ن کے بڑھنے کے ساتھ اسکی انتہا صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ اس طرح چند اہم پھیلاؤں کی صداقت کی تصدیق کر سکیں گے۔ لیکن طالب علم کو یہاں بتانا ضروری ہے کہ اس طریقہ کا استعمال بہت محدود ہے کیونکہ کسی دئے ہوئے تفاعل کے ن ویں مشتق کی عام شکل صرف خاص صورتوں میں ہی حاصل ہو سکتی ہے۔ علاوہ ازیں اگر یہ طریقہ کامیاب بھی ہو تب بھی اصل نتیجہ حاصل کرنے کا یہ آتنا علم آموز طریقہ نہیں ہے۔

(آ) اگر ف (لا) = جم لا .... (۱)

تو $\frac{لا^ن}{|ن}$ ف$^{(ن)}$ (طہ لا) = $\frac{لا^ن}{|ن}$ جم (طہ لا + $\frac{ن\pi}{۲}$) .....(۲)

کسر $\frac{لا^ن}{|ن}$ کی انتہائی قیمت صفر ہے اور چونکہ جیب التمام کی قیمت ہمیشہ ± ۱ کے درمیان رہتی ہے اس لئے دفعہ ۱۴۰ کا پھیلاؤ (۱۰) لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔

جب لا کی صورت میں بھی استدلال کا یہی طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے

(۲) اگر ف (لا) = (۱ + لا)^م .... (۳)

تو $\frac{لا^ن}{|ن}$ ف$^{(ن)}$ طہ لا) = $\frac{م(م-۱)....(م-ن+۱)}{۱\times۲\times۳\times...\times ن}$ $\frac{لا^ن}{(۱+طہ لا)^{ن-م}}$

(۴)........

اسے $(1+\text{ط}\,\text{لا})^{\text{م}}$ اور ذیل کے نمونے کے ن اجزاء کا حاصل ضرب خیال کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{م}-1+1}{\text{ر}} \; \frac{\text{لا}}{1+\text{ط}\,\text{لا}} \quad \text{یا} \quad (-1+\frac{\text{م}+1}{\text{ر}}) \frac{\text{لا}}{1+\text{ط}\,\text{لا}} \quad \ldots\ldots (5)$$

۴۹۱ اگر $1 > \text{لا} > 0$ تو کسر $\frac{\text{لا}}{1+\text{ط}\,\text{لا}}$ کی قیمت صفر اور لا کے درمیان ہوگی اور چونکہ (۵) کا پہلا جزو ضربی ر کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ انتہائی قیمت -۱ کی طرف مائل ہوتا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ن کو کافی بڑا لینے سے جملہ (۴) کی قیمت کو کسی مخصوص چھوٹی مقدار سے کم کیا جا سکتا ہے۔

اس لئے اگر $1 > \text{لا} > 0$ تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$(1+\text{لا})^{\text{م}} = 1 + \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}\text{لا}^2 + \ldots \infty \text{ تک} \ldots (6)$$

لیکن لا کے منفی ہونے کی صورت میں مذکورہ بالا نتیجہ نہیں حاصل ہوتا اگر $|\text{لا}| < 1$، کیونکہ $\text{لا} = -\text{لا}_1$ درج کرنے سے کسر $\frac{\text{لا}_1}{1-\text{ط}\,\text{لا}_1}$ کی قیمت ایک سے صرف اسوقت کم ہے جبکہ $\text{ط} < \frac{1-\text{لا}_1}{\text{لا}_1}$

اور اگر $\text{لا}_1 > \frac{1}{2}$ ہے تو ط کو اس قیمت سے کم فرض کرنے کے واسطے کوئی دلیل نہیں ہے۔

اس صورت میں باقی کی رقم کو کوشی کی شکل [دفعہ ۱۸۷ (۵)] میں لکھنا مفید ہوگا۔ اب (۴) کی بجائے ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{م}(\text{م}-1)\ldots\ldots(\text{م}-\text{ن}+1)}{1\times 2\times\ldots\ldots\times(\text{ن}-1)} \; \frac{(1-\text{ط})^{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{(1+\text{ط}\,\text{لا})^{\text{ن}-\text{م}}} \ldots\ldots (7)$$

یہ $\text{م}\,\text{لا}(1+\text{ط}\,\text{لا})^{\text{م}-1}$ اور ذیل کے نمونے کے (ن-۱) اجزاء کا حاصل

ضرب ہے

$$\left(\text{-۱+}\frac{\text{م}}{\text{ر}}\right)\frac{\text{لا - طالا}}{\text{۱ + طالا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۸})$$

اگر لا مثبت ہے تو اس جملہ کی انتہا صفر اور - لا کے درمیان ہوگی پس اگر لا > ۱ تو باقی کی انتہا پہلے کی طرح صفر ہے۔
اگر لا = - لا، جبکہ ۱ > لا، > ۰ تو جملہ (۸) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$\left(\text{۱-}\frac{\text{م}}{\text{ر}}\right)\frac{\text{۱ - طا}}{\text{۱ - طالا}_\text{۱}}\ \text{لا}_\text{۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۹})$$

جس کی انتہا صفر اور لا، کے درمیان ہے۔
اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ باقی کی رقم (۷) کی انتہا - ۱ اور + ۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہے۔

(۳) اگر ف (لا) = لوک (۱ + لا) .... (۱۰)

$$\text{تو}\ \frac{\text{لا}^\text{ن}}{\underline{|\text{ن}}}\ \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{طالا}) = \frac{(\text{-۱})^{\text{ن-۱}}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{۱ + طالا}}\right)^\text{ن} \ldots\ldots (\text{۱۱})$$

پہلے جزو ضربی کی انتہائی قیمت صفر ہے اور اگر لا مثبت ہو اور ≯ ۱ سے

تو $\frac{\text{لا}}{\text{۱ + طالا}}$ ≯ ۱ پس (۱۱) کی انتہائی قیمت جبکہ ن ← ∞ صفر ہے اور دفعہ ۱۸۴ کا پھیلاؤ (۱۶) لا = ۰ سے لا = ۱ کے لئے بشمول طرفین صحیح ہے شکل ۱۳۶ دیکھو۔

باقی کی رقم کی اوپر والی شکل سے لا کی ان منفی قیمتوں پر بھی غور نہیں کر سکتے جن کے لئے |لا| > ۱ اس لئے بجائے (۱۱) کے کوشی کی باقی کی رقم یہ حاصل ہوتی ہے

$$(\text{-۱})^{\text{ن-۱}}\frac{\text{لا}}{\text{۱ + طالا}}\left(\frac{\text{لا - طالا}}{\text{۱ + طالا}}\right)^{\text{ن-۱}} \quad \ldots\ldots (\text{۱۲})$$

۳۹۱

اسمیں لا = −لا۱ درج کرنے سے جہاں ۱ > لا۱ > ۰ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{-\text{لا}_1}{1-\text{طہ}\,\text{لا}_1} \times \left(\frac{\text{لا}_1-\text{طہ}\,\text{لا}_1}{1-\text{طہ}\,\text{لا}_1}\right)^{\text{ن}-1} \quad \text{.........(۱۳)}$$

اور چونکہ $\frac{\text{لا}_1-\text{طہ}\,\text{لا}_1}{1-\text{طہ}\,\text{لا}_1} < \text{لا}_1$ ہے اسلئے ن کے بڑھنے کے ساتھ اسکی انتہا صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔

۱۸۹ — مسئلہ ٹیلر کا اطلاق۔ منحنیات کا رتبۂ تماس۔

اگر دو منحنی دو نقاط پر قطع کریں اور ان میں سے ایک منحنی کو اس طور پر مسلسل بدلا جائے کہ دونوں نقطے ایک نقطہ ن پر منطبق ہو جائیں تو ایسی صورت میں کہتے ہیں کہ دونوں منحنیوں کا نقطہ ن پر پہلے رتبہ کا تماس ہے۔ اسکی ایک مثال منحنی اور اس کے مماسی خط کا تماس ہے۔ اور جب کبھی دو منحنیوں میں پہلے رتبہ کا تماس ہوتا ہے تو ایک مشترک مماسی خط ہوتا ہے۔

نیز اگر دو منحنی ایک دوسرے کو تین نقاط پر قطع کریں اور ان میں سے ایک منحنی کو اسطور پر بدلا جائے کہ یہ تینوں نقاطِ تقاطع ایک ہی نقطہ ن پر منطبق ہو جائیں تو ایسی صورت میں نقطہ ن پر منحنیوں کا دوسرے رتبہ کا تماس ہوتا ہے اسکی ایک مثال کسی منحنی اور اس کے لثمی دائرہ کا تماس ہے (دفعہ ۱۳۰)۔

فرض کرو کہ منحنیات

$$\text{ما} = \text{فہ}(\text{لا}) \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \text{خہ}(\text{لا}) \quad \text{.........(۱)}$$

تین نقاط پر جن کے فصلے بالترتیب لا۱، لا۲، لا۳ ہیں ایکدوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

اب تفاعل

$$\text{فا}(\text{لا}) \equiv \text{فہ}(\text{لا}) - \text{خہ}(\text{لا}) \quad \text{.........(۲)}$$

جو دونوں منحنیوں کے فرق کو ظاہر کرتا ہے لا = لا۱، لا۲، لا۳ کے لئے صفر ہوگا پس فا(لا) اور فاَ(لا) کے مسلسل ہونے کے مفروضہ پر مشتق تفاعل فاَ(لا) بمطابق دفعہ ۹۴، لا۱ اور لا۲ کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے لئے

صفر ہوگا، فرض کرو کہ یہ قیمت لا = لاَ ہے اور اسی طرح لا، اور لاَ کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے لئے صفر ہوگا جو فرض کرو کہ لا = لاً ہے۔ اب مذکورہ بالا مسئلہ کے مکرر استعمال سے اگر فاً (لا) وقفہ لاً اور لا، میں مسلسل ہے تو یہ صفر ہوگا لا کی کسی خاص قیمت کے لئے جو لاً اور لاً کے درمیان واقع ہے، فرض کرو کہ یہ لا = لاً ہے۔ پس اگر منحنیات (۱) میں سے کسی ایک منحنی کو اسطور مسلسل بدلا جائے کہ دونوں نقطے لا = لاَ، لاً ایک ہی نقطہ لا = لا، پر منطبق ہو جائیں تو فا (لا،)، فاَ (لا،)، فاً (لا،) کی قیمت بھی صفر ہوگی یعنی لا = لا، کے لئے ذیل کی مساواتیں ایک ساتھ پوری ہوں گی

فما (لا،) = خما (لا،)، فمَا (لا،) = خمَا (لا،)، فمًا (لا،) = خمًا (لا،) ....(۳)

بالفاظ دیگر اگر دو منحنیوں کا کسی نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس ہو تو اس نقطہ پر ما، فر ما/فر لا، فر² ما/فر لا² کی قیمتیں دونوں منحنیوں کے لئے مساوی ہوں گی

۶۹۲ مثال:- منحنی　ما = فما (لا) ....(۴)

سے کسی دیئے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کے تماس رکھنے والے دائرہ کی مساوات دریافت کرو۔

مرکز (لا،، ما،) اور نصف قطر نق والے دائرہ کی مساوات ہے

(لا − لا،)² + (ما − ما،)² = نق² ....(۵)

اگر اسے بلحاظ لا دو مرتبہ تفرق کیا جائے تو

لا − لا، + (ما − ما،) فر ما/فر لا = ۰ ....(۶)

اور　۱ + (فر ما/فر لا)² + (ما − ما،) فر² ما/فر لا² = ۰ ....(۷)

ان نتائج میں اگر نق کا حاصل فرض کیا جاتا ہے جن کی تعیین مساوات (۵) سے ہوتی ہے یعنی اگر دائرہ کا منحنی (۴) کے ساتھ نقطہ (لا، ما) پر دوسرے رتبہ کا تماس ہو تو ما، فر ما/فر لا اور فر² ما/فر لا² کی قیمتیں منحنی اور دائرہ کے لئے ایک ہی ہوں گی۔

اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مساوات (۵)، (۶)، (۷) میں لا، ما، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ کی قیمتیں منحنی (۴) سے حاصل کی گئی ہیں۔ ان مساواتوں سے دائرہ یگانہ طور پر متعین ہو جاتا ہے یعنی مرکز کے محدد اور نصف قطر ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لا}_{۱} = \text{لا} - \frac{\left\{ ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} \right\} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}}{\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}} \text{،} \quad \text{ما}_{۱} = \text{ما} + \frac{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}}{\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}} \quad \dots\dots (۸)$$

$$\text{اور نصف قطر ر} = \frac{\left[۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} \right]^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}} \quad \dots\dots\dots\dots (۹)$$

دفعہ ۱۳۵ دیکھو۔

مذکورہ بالا بحث کی توسیع کی جا سکتی ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر دو منحنی ن+۱ متصل نقطوں پر قطع کریں یعنی ن ویں رتبہ کا تماس رکھیں تو

$$\text{ما}\text{،} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\text{،} \quad \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}\text{،} \quad \dots\dots \quad \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$$

کی قیمتیں زیر غور نقطہ پر دونوں منحنیوں کے لئے مساوی ہونگی۔ دفعات ۱۸۵ اور ۱۸۶ کی تحقیقات سے، ن ویں رتبہ کے نقطہ تماس کی پڑوس میں، دونوں منحنیوں کے باہم قریب ہونے کے ناپ کا تعین کیا جا سکتا ہے۔ مفروضہ کے رو سے نقطہ لا = ا پر

$$\text{فما(ا)} = \text{خما(ا)}\text{،} \quad \text{فما}'\text{(ا)} = \text{خما}'\text{(ا)} \dots\dots \text{فما}^{(\text{ن})}\text{(ا)} = \text{خما}^{(\text{ن})}\text{(ا)} \dots (۱۰)$$

اس لئے اگر فا(لا) کی تعریف (۲) کے مطابق کی جائے تو

$$\text{فا(ا)} = ۰\text{،} \quad \text{فا}'\text{(ا)} = ۰\text{،} \quad \text{فا}''\text{(ا)} = ۰ \dots\dots \text{فا}^{(\text{ن})}\text{(ا)} = ۰ \dots (۱۱)$$

۷۹۴

اس سے اخذ ہوتا ہے کہ مناسب شرائط کے ماتحت

$$فا(ا+ھ) = \frac{ھ^{ن+۱}}{|ن+۱} فا^{(ن+۱)}(ا+ طہ ھ) \ldots\ldots (۱۲)$$

جہاں ۰ < طہ < ۱، پس اگر ھ لاانتہا چھوٹا ہو تو معینوں کا فرق (ن+۱) ویں رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے۔ علاوہ ازیں اس کی علامت کا ھ کے ساتھ بدلنا یا نہ بدلنا ن کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہے۔

مثلاً منحنی کا مماسی خط سے ہٹاؤ نقطہ تماس کی پڑوس میں اکثر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے اور اس لئے عموماً منحنی اس نقطہ پر مماسی خط کو عبور نہیں کرتا۔ منحنی کا انحنی دائرہ سے ہٹاؤ تیسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے اور اس لئے اکثر منحنی دائرہ کو عبور کرتا ہے۔ صفحہ ۶۷۹ پر شکل ۱۱۶ دیکھو۔ لیکن اگر دائرہ سے تماس چوتھے رتبہ کا ہو جیسا کہ مخروطی کے راس پر ہوتا ہے تو منحنی دائرہ کو عبور نہیں کرتا۔ اسی بات کی مزید مثالیں صفحہ ۶۹۷ پر شکل ۱۳۶ میں دکھائی گئی ہیں، منحنیات ۱، ۳، ۵ منحنی ما = لوک (۱+لا) کو عبور نہیں کرتے لیکن منحنیات ۲، ۴، ۶ عبور کرتے ہیں۔

۱۹۰ - اعظم اور اقل قیمتیں -

اگر فما(ا) متغیر (ا) کا ایسا تفاعل ہو جس کے پہلے اور دوسرے مشتق متغیر کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہوں تو

$$فما(ا+ھ) - فما(ا) = ھ فما'(ا) + \frac{ھ^۲}{|۲} فما''(ا+ طہ ھ) \ldots (۱)$$

جہاں ۰ > طہ > ۱، اس میں ھ کو کافی چھوٹا لینے سے بائیں جانب کی دوسری رقم کو عموماً مقدار میں پہلی رقم سے چھوٹا بنایا جا سکتا ہے اور اس صورت میں فما(ا+ھ) - فما(ا) کی علامت وہی ہوگی جو ھ فما'(ا) کی ہے یعنی ھ کے ساتھ اس کی علامت بدلے گی۔ اب اگر فما(ا) تفاعل فما(لا) کی اعظم یا اقل قیمت ہو تو فرق فما(ا+ھ) - فما(ا) کی علامت ھ کی

کافی چھوٹی قیمتوں کے لئے ایک ہی ہوگی خواہ وہ مثبت ہو یا منفی۔
پس موجودہ شرائط کے ماتحت تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے لئے
ضروری ہے کہ فہَ (ا) = ۰
اب فرض کرو کہ فہَ (ا) = ۰ تو نتیجہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

فہ (ا + ھ) - فہ (ا) = ھ² / |۲ فہً (ا + طہ ھ) ...... (۲)

جب ، ھ کافی چھوٹا ہو تو بائیں جانب کی علامت وہی ہوگی جو فہً (ا)
کی ہے۔ پس اگر فہً (ا) مثبت ہے تو فہ (ا + ھ) > فہ (ا) ہے
خواہ ھ مثبت ہو یا منفی یعنی فہ (ا) اقل قیمت ہے۔
اسی طرح اگر فہً (ا) منفی ہے تو فہ (ا) اعظم قیمت ہے۔
اگر فہً (ا) بھی فہَ (ا) کے ساتھ صفر ہو جائے تو (۱) کے پھیلاؤ میں
زائد رقوم لینا ضروری ہوگا۔
عام صورت پر غور کرنے کے لئے فرض کرو کہ

فہَ (ا) = ۰، فہً (ا) = ۰ ، ..... فہ^(ن-۱) (ا) = ۰ ...... (۳)

لیکن فہ^(ن) (ا) ≠ ۰ .... (۴)

تو فہ (ا + ھ) - فہ (ا) = ھ^ن / |ن فہ^(ن) (ا + طہ ھ) ... (۵)

اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو اس کی علامت وہی ہے جو ھ^ن فہ^(ن) (ا)
کی ہے۔ اگر ن طاق ہے تو اسکی علامت ھ کی علامت پر منحصر ہے
اور اس لئے اس نقطہ پر تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت نہیں ہے۔ لیکن اگر
ن جفت ہے تو اس نقطہ کا اعظم یا اقل ہونا فہ^(ن) (ا) کے منفی یا مثبت
ہونے پر منحصر ہے۔
عبارت میں اسے ذیل کی طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔ لا کی کسی ویلی
قیمت کے لئے تفاعل فہ (لا) کی اعظم یا اقل قیمت صرف اس صورت میں

ہوگی جبکہ لا کی اس قیمت کے لئے سب سے پہلا صفر نہ ہونے والا مشتق جفت رتبہ کا ہو، ورنہ نہیں ہوگی۔
تفاعل کا اعظم یا اقل ہونا اس مشتق کے منفی یا مثبت ہونے پر مبنی ہے۔

مثال ۱: فہ (لا) = جمز لا + جم لا ....(۶)

اس لئے فہَ (لا) = جبز لا - جب لا ، فہً (لا) = جمز لا - جم لا
فہً (لا) = جبز لا + جب لا ، فہ^(۴) (لا) = جمز لا + جم لا

لا = ۰ کے لئے صفر نہ ہونے والا پہلا مشتق فہ^(۴) (لا) چوتھے رتبہ کا ہے اور چونکہ فہ^(۴) (۰) مثبت ہے، لہذا فہ (۰) تفاعل فہ (لا) کی اقل قیمت ہے
یہ امر فہ (لا) کے پھیلاؤ سے بھی ظاہر ہے

$$\text{فہ (لا)} = ۲ \left(۱ + \frac{\text{لا}^۴}{\lfloor ۴} + \frac{\text{لا}^۸}{\lfloor ۸} + \cdots \right) \cdots\cdots (۷)$$

مثال ۲: فرض کرو کہ ق = ب جم طہ - ج جم ۲ طہ ....(۸)

اس سے

$$\frac{\text{ف ق}}{\text{ف طہ}} = -\text{ب جب طہ} + ۲\,\text{ج جب ۲ طہ}$$

$$= \text{جب طہ} (۴\,\text{ج جم طہ} - \text{ب})$$

$$\frac{\text{ف}^۲\text{ق}}{\text{ف طہ}^۲} = -\text{ب جم طہ} + ۴\,\text{ج جم ۲ طہ}$$

$$= \text{جم طہ} (۴\,\text{ج جم طہ} - \text{ب}) - ۴\,\text{ج جب}^۲\text{طہ}$$

$$\frac{\text{ف}^۳\text{ق}}{\text{ف طہ}^۳} = \text{ب جب طہ} - ۸\,\text{ج جب ۲ طہ}$$

$$\frac{\text{ف}^۴\text{ق}}{\text{ف طہ}^۴} = \text{ب جم طہ} - ۱۶\,\text{ج جم ۲ طہ}$$

اختصار کے لئے صرف پہلے ربع کے زاویوں پر غور کرو۔ اگر ب > ۴ ج تو ق کی مقیم قیمت صرف طہ = ۰ کی صورت میں ہے اور طہ = ۰ کیلئے

$\frac{\text{فر}^2\text{ق}}{\text{فرطہ}^2}$ > ۰ اس لئے ق کی اس مقام پر اعظم قیمت ہے۔

۴۹۰ اگر ب > ۴ ج تو ق اقل ہے جبکہ طہ = ۰ اور اعظم ہے جبکہ طہ = جم$^{-1}$ $\frac{\text{ب}}{\text{۴ ج}}$

اگر ب = ۴ ج تو طہ = ۰ کے لئے $\frac{\text{فرق}}{\text{فرطہ}}$ ، $\frac{\text{فر}^2\text{ق}}{\text{فرطہ}^2}$ ، $\frac{\text{فر}^3\text{ق}}{\text{فرطہ}^3}$ صفر ہیں اور

$\frac{\text{فر}^4\text{ق}}{\text{فرطہ}^4}$ منفی ہے۔ پس ق اعظم قیمت ہے۔

یہ مثال ذیل کے سوال کی تحقیقات میں نمودار ہوتی ہے۔ ایک مربع تیرا انتصابی سستوی میں واقع ہے اور دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں لٹکا ہوا ہے۔ توازن کے مقامات پر غور کرو۔ اگر ب مربع کے وتر یا بین زاوی کا طول ہے اور ج میخوں کے درمیان فاصلہ ہے تو ق توانائی بالقوہ کے متناسب ہے جبکہ میخوں کو ملانے والے خط کو کاٹنے والا بین زاوی انتصابی خط سے طہ کا زاویہ بناتا ہے۔ توازن کے لئے ق کی ستقیم قیمت ہونی چاہئے اور قائم توازن کے لئے ق کو اقل ہونا چاہئے۔

۱۹۱۔ مستوی منحنیات کا صغاری ہندسہ۔

فرض کرو کہ مستوی منحنی کے کسی نقطہ و کو مبدا مان لیا جاتا ہے اور نقطہ و پر کے مماس اور عماد کو محددوں کے محور مانا جاتا ہے۔ مبدا کے متصل منحنی کے کسی نقطہ ن کے محددوں کو قوس و ن = س کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے۔

اگر اختصار کے لئے تفرقات بلحاظ س کے زبر سے ظاہر کئے جائیں تو دفعہ ۱۱۱ کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

لاَ = جم فہ ، ماَ = جب فہ ....(۱)

اس لئے لاَ = جب فما × فمَا ، لاً = جم فما × فمَا^{۲} - جب فما × فمً

ماَ = جم فما × فمَا ، ماً = - جب فما × فمَا^{۲} + جم فما × فمً ……(۲)

اور اسی طرح —

اب مسئلۂ میکلورن سے

لا = لاَ + $\frac{\text{س}}{۱}$ لاَ + $\frac{\text{س}^{۲}}{۲\times۱}$ لاً + ……

ما = ما + $\frac{\text{س}}{۱}$ ماَ + $\frac{\text{س}^{۲}}{۲\times۱}$ ماً + …… ……(۳)

جہاں کہ حرف کے لاحقہ سے اسکی وہ قیمت ظاہر کی گئی ہے جو یہ س = ۰ کے لئے اختیار کرتا ہے۔

لیکن (۱) اور (۲) میں فما = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

لاَ = ۱ ، لاً = ۰ ، لاً = - $\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}$ ، ……

ماَ = ۰ ، ماَ = $\frac{۱}{\text{ر}}$ ، ماً = - $\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}$ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ ، …… ……(۴)

جہاں $\frac{\text{فر فما}}{\text{فر س}}$ کی بجائے $\frac{۱}{\text{ر}}$ لکھا گیا ہے۔

پس لا = س - $\frac{\text{س}^{۳}}{۶\text{ر}^{۲}}$ + …… ، ما = $\frac{\text{س}^{۲}}{۲\text{ر}}$ - $\frac{\text{س}^{۳}}{۶\text{ر}^{۲}}$ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ + …… ……(۵)

جہاں ر اور $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ مبدا پر قیمتیں ہیں۔

یہ ضوابط صغاری ہندسہ کے اکثر سوالات میں مفید ثابت ہونگے۔

مثال (۱)۔ نتیجہ (۵) میں دوسرے ضابطہ سے ظاہر ہے کہ انتہا میں نقطہ قسہ ۹۷ منحنی کے انحنائی دائرہ سے ہٹاؤ ہے

$\frac{۱}{۶}$ $\frac{\text{س}^{۳}}{\text{ر}^{۲}}$ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ ……(۶)

کیونکہ $\frac{فر ر}{فر س}$ دائرہ کے لئے صفر ہے -

اور عموماً ان تمام صورتوں میں جنمیں $س^3$ نظر انداز ہو سکتا ہے منحنی کی بجائے اسکا التمی دائرہ رکھا جا سکتا ہے -

مثال ۲- نیز نقطہ ن کا عماد نقطہ و کے عماد کو ایسے نقطہ پر کاٹتا ہے جسکا و سے فاصلہ ما + لا مم فہ ہے۔ اگر ہم س میں دوسرے رتبہ کی رقموں کو نظر انداز کر دیں تو

$$ما + لا مم فہ = \frac{س}{\frac{س}{ر} - \frac{1}{2}\frac{س^2}{ر^2}\frac{فر ر}{فر س}} = ر\left(1 + \frac{1}{2}\frac{س}{ر}\frac{فر ر}{فر س}\right)$$

پس نقطہ تقاطع کا نقطہ س کے مرکز انحنا سے فاصلہ انتہا میں ہے

$$\frac{1}{2} س \frac{فر ر}{فر س} \quad \dots\dots\dots (۷)$$

اگر ر کی قیمت اعظم یا اقل ہے تو عموماً $\frac{فر ر}{فر س} = ۰$ اور فاصلہ اعلیٰ تر رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور بر پیچ پر و کا مماثل نقطہ قرنی نقطہ ہے -

امثلہ نمبر ۶۲

پھیلاؤ

$$(1) \quad جمز لا جم لا = 1 - \frac{2^2 لا^4}{\underline{4|}} + \frac{2^4 لا^8}{\underline{8|}} - \dots\dots\dots$$

$$جبز لا جب لا = لا^2 - \frac{2^3 لا^6}{\underline{6|}} + \frac{2^5 لا^{10}}{\underline{10|}} - \dots\dots\dots$$

$$(2) \quad جمز لا جب لا = لا + \frac{2 لا^3}{\underline{3|}} - \frac{2^2 لا^5}{\underline{5|}} - \dots\dots\dots$$

$$\text{جنر لا جم لا} = \text{لا} - \frac{۲\,\text{لا}^{۳}}{|\underline{۳}} - \frac{۲^{۲}\,\text{لا}^{۵}}{|\underline{۵}} + \cdots\cdots$$

(۳) $$\text{قو}^{\text{لا}}\,\text{جم لا} = ۱ + \text{لا} - \frac{۲\,\text{لا}^{۳}}{|\underline{۳}} - \frac{۲^{۲}\,\text{لا}^{۴}}{|\underline{۴}} - \frac{۲^{۲}\,\text{لا}^{۵}}{|\underline{۵}} + \frac{۲^{۳}\,\text{لا}^{۷}}{|\underline{۷}} + \cdots\cdots$$

$$\text{قو}^{\text{لا}}\,\text{جب لا} = \text{لا} + \text{لا}^{۲} + \frac{۲\,\text{لا}^{۳}}{|\underline{۳}} - \frac{۲^{۲}\,\text{لا}^{۵}}{|\underline{۵}} - \frac{۲^{۳}\,\text{لا}^{۶}}{|\underline{۶}} - \frac{۲^{۳}\,\text{لا}^{۷}}{|\underline{۷}} + \cdots\cdots$$

(۴) $$\text{قط لا} = ۱ + \frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{۵\,\text{لا}^{۴}}{|\underline{۴}} + \frac{۶۱\,\text{لا}^{۶}}{|\underline{۶}} + \cdots\cdots$$

(۵) $$\text{لوک قط لا} = \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲} + \frac{\text{لا}^{۶}}{۴۵} + \cdots\cdots$$

(۶) $$\text{لوک جنر لا} = \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۱۲}\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۴۵}\text{لا}^{۶} - \cdots\cdots$$

(۷) $$\text{مسنر لا} = \text{لا} - \frac{۱}{۳}\text{لا}^{۳} + \frac{۲}{۱۵}\text{لا}^{۵} - \frac{۱۷}{۳۱۵}\text{لا}^{۷} + \cdots\cdots$$

۹۸

(۸) $$\text{جم}^{۲}\,\text{لا} = ۱ - \text{لا}^{۲} + \frac{۲^{۳}\,\text{لا}^{۴}}{|\underline{۴}} - \frac{۲^{۵}\,\text{لا}^{۶}}{|\underline{۶}} + \cdots\cdots$$

(۹) $$\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{لا} = ۱ - \frac{\text{ن}}{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ن}(۳\text{ن}-۲)}{|\underline{۴}}\text{لا}^{۴} - \cdots\cdots$$

(۱۰) $$\left(\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} = ۱ - \frac{\text{ن}}{۳}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ن}(۵\text{ن}-۲)}{۳|\underline{۵}}\text{لا}^{۴} - \cdots\cdots$$

(۱۱) $$\frac{\text{لا}}{\text{جب لا}} = ۱ + \frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۳}} - \frac{۱۴\,\text{لا}^{۴}}{|\underline{۶}} + \cdots\cdots$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{جنر لا}} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۳}} + \frac{۱۴\,\text{لا}^{۴}}{|\underline{۶}} - \cdots\cdots$$

(۱۲) $$\frac{\text{لا}}{\text{قو}^{\text{لا}}-۱} = ۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۱}{۶}\cdot\frac{\text{لا}^۲}{|۲} - \frac{۱}{۳۰}\cdot\frac{\text{لا}^۴}{|۴} + \ldots\ldots$$

(۱۳) $$\text{سں}\left(\frac{\pi}{۴}+\text{لا}\right) = ۱ + ۲\text{لا} + ۲\text{لا}^۲ + \frac{۸}{۳}\text{لا}^۳ + \frac{۱۰}{۳}\text{لا}^۴ + \ldots\ldots$$

(۱۴) $$\text{لوک سں}\left(\frac{\pi}{۴}+\text{لا}\right) = ۲\text{لا} + \frac{۴}{۳}\text{لا}^۳ + \frac{۴}{۳}\text{لا}^۵ + \ldots\ldots$$

(۱۵) $$\text{لوک}(۱+\text{جب لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۶} - \frac{\text{لا}^۴}{۱۲} + \frac{\text{لا}^۵}{۲۴} - \ldots\ldots$$

(۱۶) $$\text{لوک}(۱+\text{قو}^{\text{لا}}) = \text{لوک}۲ + \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۱}{۸}\text{لا}^۲ - \frac{۱}{۱۹۲}\text{لا}^۴ + \ldots\ldots$$

(۱۷) $$\frac{۳\,\text{جب لا}}{۲+\text{جم لا}} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۵}{۱۸۰} + \ldots\ldots$$

(۱۸) $$\text{لوک قط}^۲\frac{\text{طہ}}{۲} = \frac{۱}{۲}\times\frac{\text{جب}^۲\text{طہ}}{۲} + \frac{۱\times۳}{۴\times۲}\times\frac{\text{جب}^۴\text{طہ}}{۴} + \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\times\frac{\text{جب}^۶\text{طہ}}{۶} + \ldots\ldots$$

(۱۹) اگر $\text{عف} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{عف}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{\text{لا جم عہ}}\,\text{جم}(\text{لا جب عہ}) = \text{قو}^{\text{لا جم عہ}}\,\text{جم}(\text{لا جب عہ} + \text{ن عہ})$$

پس حاصل کرو کہ

$$\text{قو}^{\text{لا جم عہ}}\,\text{جم}(\text{لا جب عہ}) = ۱ + \text{لا جم عہ} + \frac{\text{لا}^۲}{|۲}\text{جم}\,۲\text{عہ} + \frac{\text{لا}^۳}{|۳}\text{جم}\,۳\text{عہ} + \ldots\ldots$$

(۲۰) تفاعلات لا، $\text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{|۳}$، $\text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{|۳} + \frac{\text{لا}^۵}{|۵}$ کی ترسیم کھینچو

اور انکا جب لا کی ترسیم سے مقابلہ کرو۔

(۲۱) تفاعلات $1-\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}$ ، $1-\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}+\frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4}$ کی ترسیمیں کھینچو اور انکا جم لا کی ترسیم سے مقابلہ کرو۔

(۲۲) ثابت کرو کہ دفعہ ۱۸۵ کے ضابطہ (۱۷) میں طما کی انتہائی قیمت جبکہ ھ کو بے حد چھوٹا کر دیا جائے عموماً $\frac{1}{\text{ن}+1}$ ہے۔

(۲۳) ثابت کرو کہ اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو سمپسن کے تقریبی تکمل کے ضابطے (۹) میں [دفعہ ۱۱۴ (۹)] خطا تقریباً $\frac{1}{90}\,\text{ھ}^5\,\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فر لا}^4}$ ہے۔

(۲۴) ثابت کرو کہ فما(لا) کی اوسط قیمت حدود لا = ا - ھ اور لا = ا + ھ کے درمیان ہے

$$\text{فما}(\text{ا})+\frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 3}\,\text{فما}''(\text{ا})+\frac{\text{ھ}^4}{\lfloor 5}\,\text{فما}^{(4)}(\text{ا})+\ldots\ldots$$

نیز ثابت کرو کہ یہ قیمت حدود کی قیمتوں کے حسابی اوسط سے بقدر ذیل کے کم ہوگی

$$\frac{\text{ھ}^2}{1\times 3}\,\text{فما}''(\text{ا})+\frac{\text{ھ}^4}{5\times\lfloor 3}\,\text{فما}^{(4)}(\text{ا})+\frac{\text{ھ}^6}{7\times\lfloor 5}\,\text{فما}^{(6)}(\text{ا})+\ldots$$

(۲۵) ایک دیے ہوئے منحنی سے دوسرا منحنی اس طرح بنایا جاتا ہے کہ دوسرے منحنی کا معیّن لا کی کسی قیمت ا کے لئے حدود لا = ا ± ھ میں پہلے منحنی کے معیّنوں کے اوسط کے مساوی ہے، یہاں ھ مقررہ چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے منحنی کا معیّن پہلے منحنی کے معیّن سے اتنا بڑا ہے جتنا کہ قوس (جس کے حدود لا = ا ± ھ ہیں) کے ڈھیل (Sagitta) کا ایک تہائی ہے۔

امثلہ ۶۳

ہندسی استعمال

(۱) ثابت کرو کہ اگر دفعہ ۱۹۱ کے پھیلاؤ (۴) کو س⁴ تک پھیلایا جائے تو

$$\text{لا} = \text{س} - \frac{1}{6}\frac{\text{س}^3}{\text{ر}^2} + \frac{1}{8}\frac{\text{س}^4}{\text{ر}^3}\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} + \dots\dots$$

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\frac{\text{س}^2}{\text{ر}} - \frac{1}{6}\frac{\text{س}^3}{\text{ر}^2}\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$$

$$- \frac{1}{24}\frac{\text{س}^4}{\text{ر}^3}\left[1 - 2\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}\right)^2 + \text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فر س}^2}\right] + \dots$$

(۲) اگر کسی منحنی کے نقطہ و پر مماس اور عماد کو لا محور اور ما محور بالترتیب مانا جائے اور منحنی کے کسی نقطہ لا، ما کے محددوں کو فما کی رقوم میں جہاں فما مماس کا لا محور کے ساتھ میلان ہے پھیلایا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ر فما} - \frac{1}{2}\frac{\text{فر ر}}{\text{فر فما}}\,\text{فما}^2 - \frac{1}{6}\left(\text{ر} - \frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فر فما}^2}\right)\text{فما}^3 + \dots$$

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\,\text{ر فما}^2 + \frac{1}{3}\frac{\text{فر ر}}{\text{فر فما}}\,\text{فما}^3 + \dots\dots$$

(۳) ثابت کرو کہ گذشتہ سوال کے محوروں کے مطابق مرکز انحنا کے محدد ذیل سے حاصل ہونگے

$$\text{لا}_1 = -\frac{1}{2}\frac{\text{فر ر}}{\text{فر فما}}\,\text{فما}^2 - \frac{1}{3}\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فر فما}^2}\,\text{فما}^3 - \dots\dots$$

$$\text{ما}_1 = \text{ر} + \frac{\text{فر ر}}{\text{فر فما}}\,\text{فما} + \frac{1}{2}\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فر فما}^2}\,\text{فما}^2 + \dots\dots$$

(۴) اگر و اور ن منحنی کے دو متصل نقطے ہوں اور ن ق ذرو ن پر

عمود کھینچا جائے اس طرح کہ وہ نقطہ و پر کے عماد کو ق پر ملے تو ثابت کرو کہ انتہا میں و ق = ۲ ر۔

(۵) اگر منحنی کی قوس پر و ن چھوٹی سی قوس لی جائے اور و ت نقطہ و کے مماس پر چھوٹا سا فاصلہ ہو اور اگر ن ت ممدودہ نقطہ و کے عماد سے انتہا میں ج پر ملے تو ثابت کرو کہ و ج = ۲ ر۔

(۶) اگر ن، ق منحنی پر دو متصل نقطے ہوں اور نقطہ ن کے مماس پر ت ایسا نقطہ لیا جائے کہ ن ت = وتر ن ق اور ت ق نقطہ ن کے عماد کو ج پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ن ج کی انتہائی قیمت ۴ ر ہو گی۔

(۷) ثابت کرو کہ وتر و ن کا وسطی عمود و پر کے عماد کو ایسے نقطہ پر کاٹتا ہے جس کا مرکز انحنا سے انتہائی فاصلہ $\frac{1}{3}$ س $\frac{فر ر}{فر س}$ ہے جہاں س = و ن

(۸) منحنی کے دو متصل نقطوں ن، ق کے مماس ت پر قطع کرتے ہیں اور و وتر ن ق کا وسطی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ ت و منحنی کے عماد سے زاویہ ٹینٹ^{-1} ($\frac{1}{3}$ $\frac{فر ر}{فر س}$) بناتا ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ اگر ن ق منحنی کی ایک چھوٹی قوس ہے تو وتر کے مقابلہ میں قوس بقدر $\frac{1}{24}$ $\frac{س^3}{ر^2}$ کے بڑی ہے اور ن اور ق پر کے مماسوں کے طولوں کا حاصل جمع، قوس سے بقدر $\frac{1}{12}$ $\frac{س^3}{ر^2}$ بڑا ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ نقطۂ قرن کے قریب منحنی کی شکل تقریباً ا ما^2 = لا^3 سے ظاہر ہو سکتی ہے جہاں ا = $\frac{9}{8}$ $\frac{فر ر}{فر ما}$ ۔

(۱۱) ثابت کرو کہ نقطہ عطف کے قریب منحنی کی شکل تقریباً ما = $\frac{1}{6}$ $\frac{فر ج}{فر س}$ لا^3

سے ظاہر ہو سکتی ہے جہاں ج انحنا کی قدر ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ اگر ن منحنی کا کوئی نقطہ ہے تو ن کے قریب کے حصہ کے پر پیچ کی شکل (جبکہ نقطہ ن کا مرکز انحنا مبدا ہے)

ا ما = لا^۲ سے بیان کی جا سکتی ہے جہاں ا = ۲ ق ر^۲ / ...

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر ن اقل یا اعظم انحنا کا نقطہ ہو تو پر پیچ کی شکل تقریباً

ا^۲ ما^۲ = لا^۳

ہے، جہاں ا = ۹/۸ . ق ر^۲ / (ق ر ق ر^۲)

(۵۰۱

۱۹۴۔ مختلف رتبوں کے جزوی مشتقات :۔ اگر ع
دو یا زیادہ متبوع متغیروں لا، ما، ..... کا تفاعل ہو تو جزوی مشتقات

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \,،\, \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \quad .... \quad (۱)$$

بھی عموماً لا، ما ..... کے تفاعل ہونگے اور ان متغیروں کے لحاظ سے
انکا تفرقی نکالا جا سکتا ہے۔ پس اگر

$$\text{ع} = \text{فا} \,(\text{لا}\,،\,\text{ما}) \quad .... \quad (۲)$$

تو دوسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بنائے جا سکتے ہیں

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) ،\, \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) ،\, \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right) ،\, \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right)$$

اور انہیں اکثر اس طرح لکھا جاتا ہے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} ،\, \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}} ،\, \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} ،\, \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} \quad ...... \quad (۳)$$

اس میں ظاہر ہوگا کہ دوسری اور تیسری علامتوں میں معنی کا اصولی فرق
ہے، دونوں صورتوں میں دو عمل مختلف ترتیب میں یکے بعد دیگرے

استعمال کئے جاتے ہیں۔ تاہم دفعہ ۱۹۳ میں ثابت کیا جائیگا کہ چند شرائط کے ماتحت جو عملی سوالات میں عموماً پوری ہوتی ہیں دونوں نتائج ایک دوسرے کے متماثلاً مساوی ہیں۔ تفاعل ف (لا، ما) کے پہلے جزوی تفرقی مشتقات کو بعض موقعوں پر

$$\text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا، ما}) \quad \text{اور} \quad \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا، ما}) \quad \ldots \quad (۳)$$

سے تعبیر کیا جائیگا۔ اور دوسرے رتبہ کے مشتقات (۲) کو

$$\text{ف}_{\text{لالا}}(\text{لا، ما})،\ \text{ف}_{\text{مالا}}(\text{لا، ما})،\ \text{ف}_{\text{لاما}}(\text{لا، ما})،\ \text{ف}_{\text{ماما}}(\text{لا، ما}) \quad \text{سے} \quad (۵)$$

انکو اکثر برائے اختصار بالترتیب

$$\text{ف}_{\text{لا}}،\ \text{ف}_{\text{ما}} \quad \ldots \quad (۶)$$

$$\text{اور} \quad \text{ف}_{\text{لالا}}،\ \text{ف}_{\text{مالا}}،\ \text{ف}_{\text{لاما}}،\ \text{ف}_{\text{ماما}} \quad \ldots \quad (۷)$$

لکھا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر $\text{ع} = \text{ا لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}} \quad \ldots \quad (۸)$

$$\text{تو} \quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{م ا لا}^{\text{م}-۱}\,\text{ما}^{\text{ن}}،\quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{ن ا لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱} \quad \ldots \quad (۹)$$

$$\frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف لا}^۲} = \text{م(م}-۱)\,\text{ا لا}^{\text{م}-۲}\,\text{ما}^{\text{ن}}،\quad \frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف ما}^۲} = \text{ن(ن}-۱)\,\text{ا لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}-۲}$$

$$\frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}} = \text{م ن ا لا}^{\text{م}-۱}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱} = \frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} \quad \ldots \quad (۱۰)$$

مثال ۲۔ اگر $\text{ی} = \text{ل مس}^{-۱}\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \quad \ldots \quad (۱۱)$

$$\text{تو} \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{ل ما}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}،\quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{ل لا}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲} \quad \ldots \quad (۱۲)$$

$$\frac{\text{جف}^2 ی}{\text{جف لا}^2} = \frac{۲ لا ما}{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2} ، \quad \frac{\text{جف}^2 ی}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{ما}^2 - \text{لا}^2}{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2}$$

$$\frac{\text{جف}^2 ی}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2 ی}{\text{جف ما}^2} ، \quad = \frac{-۲ لا ما}{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

۱۹۴ — خاصیت مبادلہ کا ثبوت۔

فرض کرو کہ $ع = \text{فا}(\text{لا} ، \text{ما}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$

اور تفاعلات $ع ، \frac{\text{جف} ع}{\text{جف لا}} ، \frac{\text{جف} ع}{\text{جف ما}} ، \frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف لا}^2} ، \frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف ما}^2} \ldots (۲)$

وجود رکھتے ہیں اور متغیروں کے محدود احاطہ میں جنہیں زیر غور قیمتیں شریک ہیں مسلسل ہیں۔ ہم ثابت کرینگے کہ ان شرائط کے ماتحت

$$\frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف لا جف ما}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس مقصد کے لئے ذیل کی کسر پر غور کرو

$$\text{خما}(ھ ، ک) = \frac{\text{فا}(\text{لا}+ھ ، \text{ما}+ک) - \text{فا}(\text{لا}+ھ ، \text{ما}) - \text{فا}(\text{لا} ، \text{ما}+ک) + \text{فا}(\text{لا} ، \text{ما})}{ھ ک} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اس میں لا اور ما کو ثابت مانا گیا ہے لیکن ھ ، ک کو آخر میں لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائیگا۔
کچھ دیر کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{فا}(\text{لا}) = \text{فا}(\text{لا} ، \text{ما}+ک) - \text{فا}(\text{لا} ، \text{ما}) \quad \ldots (۵)$$

دفعہ ۵۶ (۹) کے مسئلہ اوسط قیمت سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فا}(\text{لا}+ھ) - \text{فا}(\text{لا}) = ھ \, \text{فا}'(\text{لا} + \text{طہ}_1 ھ) \ldots (۶)$$

اس میں فا(لا) کی قیمت درج کرنے سے

{فلا (لا + ھ٬ ما + ک) - فلا (لا + ھ٬ ما)} - {فلا (لا٬ ما + ک) - فلا (لا٬ ما)}

= ھ {فلا (لا + طا١ ھ٬ ما + ک) - فلا (لا + طا١ ھ٬ ما)} . . (۷)

(۵۰) جہاں ۱ > طا١ > ۰ ۔ اوراس عمل میں ما کی قیمت میں کچھہ تغیر نہیں کیا گیا۔

پس خما (ھ٬ ک) = [فلا (لا + طا١ ھ٬ ما + ک) - فلا (لا + طا١ ھ٬ ما)] / ک (۸)

اب اگر لکھا جائے

ف (ما) = فلا (لا + طا١ ھ٬ ما) . . . . (۹)

تو مذکورہ بالا مسئلہ کے مکرر استعمال سے

ف (ما + ک) - ف (ما) = ک فَ (ما + طا٢ ک) . . . . (۱۰)

یعنی فلا (لا + طا١ ھ٬ ما + ک) - فلا (لا + طا١ ھ٬ ما)

= ک فمالا (لا + طا١ ھ٬ ما + طا٢ ک) . . . . . (۱۱)

اس لئے خما (ھ٬ ک) = فمالا (لا + طا١ ھ٬ ما + طا٢ ک) . . . . (۱۲)

جہاں طا١٬ طا٢ صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔
بالکل اسیطرح ثابت کر سکتے ہیں کہ

خما (ھ٬ ک) = فلاما (لا + طا٣ ھ٬ ما + طا٤ ک) . . . . (۱۳)

جہاں طا٣٬ طا٤ بھی صفر اور ایک کے درمیان ہیں۔

یہ نتائج ٹھیک ہیں بشرطیکہ (لا + ھ٬ ما + ک) متغیروں کے اس احاطہ میں واقع ہوں جس کے بارہ میں مذکورہ بالا شرائط بیان کی گئی ہیں۔
اب اگر ھ اور ک کو لاانتہا چھوٹا بنا دیا جائے تو (۱۲) اور (۱۳) کا مقابلہ کرنے سے اور مشتقات کے تسلسل کی رو سے ظاہر ہے کہ

$$\text{فہ}_{\text{لا ما}}(\text{لا، ما}) = \text{فہ}_{\text{ما لا}}(\text{لا، ما}) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

اور یہی ثابت بھی کرنا تھا ٭

اوپر کے مسئلہ سے اخذ ہوتا ہے کہ متنوع متغیروں لا، ما، ی ...

کی کسی تعداد کے تفاعل کی صورت میں عمل

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}، \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}، \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}، \ldots\ldots\ldots$$

یا جن کو اختصار کے لئے $\text{عف}_{\text{لا}}، \text{عف}_{\text{ما}}، \text{عف}_{\text{ی}} \ldots\ldots$ سے

ظاہر کیا جا سکتا ہے عموماً مبادل ہیں یعنی ان میں سے کتنے ہی

عملوں کا نتیجہ عمل کی ترتیب پر منحصر نہیں ہے۔

مثلاً $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{عف}_{\text{ی}}\,\text{ع} = \text{عف}_{\text{لا}}(\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{عف}_{\text{ی}}\,\text{ع})$

$= \text{عف}_{\text{لا}}(\text{عف}_{\text{ی}}\,\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{ع}) = \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{عف}_{\text{ی}}(\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{ع})$

$= \text{عف}_{\text{ی}}\,\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{عف}_{\text{ما}} =$ وغیرہ وغیرہ نتیجہ (۴) سے ظاہر ہے کہ (۵۰۴)

$$\text{نہا}_{\text{ھ}\to\cdot}\ \text{خہ}(\text{ھ، ک}) = \frac{1}{\text{ک}}\ \text{نہا}_{\text{ھ}\to\cdot} \frac{\text{فہ}_{\text{لا}}(\text{لا}+\text{ھ، ما}+\text{ک}) - \text{فہ}_{\text{لا}}(\text{لا، ما}+\text{ک})}{\text{ھ}}$$

$$= \frac{1}{\text{ک}}\ \text{نہا}_{\text{ھ}\to\cdot} \frac{\text{فہ}(\text{لا}+\text{ھ، ما}) - \text{فہ}(\text{لا، ما})}{\text{ھ}}$$

$$= \frac{\text{فہ}_{\text{لا}}(\text{لا، ما}+\text{ک}) - \text{فہ}_{\text{لا}}(\text{لا، ما})}{\text{ک}} \quad \ldots (۱۵)$$

٭ غالباً یہ ثبوت اوسین بونٹ (Ossian Bonnet) کا دیا ہوا ہے۔
اِس کا متبادل ثبوت دفعہ ۱۹۴ میں دیا جائیگا۔

پس نہا نہا خم (ھ، ک) = فم (لا، ما) . . . (۱۶)
ک ← ۰ ھ ← ۰

اسی طرح حاصل ہو سکتا ہے

نہا نہا خم (ھ، ک) = فم (لا، ما) . . . . . (۱۷)
ھ ← ۰ ک ← ۰

پس اگر ہم فرض کر سکتے ہوں کہ کسر (۴) کی انتہائی قیمت جبکہ ھ اور ک کو لاانتہا چھوٹا کر دیا جاتا ہے یگانہ ہے اور ھ ک کے صفر ہونے کی ترتیب پر منحصر نہیں ہے تو مسئلہ (۳) فوراً حاصل ہوتا ہے لیکن ایک آسان مثال سے ظاہر ہو جائیگا کہ ہر صورت میں بغیر مزید غور کے یہ فرض کر لینا صحیح نہیں ہے

اگر ف (ھ، ک) = $\frac{ھ^2 - ک^2}{ھ^2 + ک^2}$

تو نہا نہا ف (ھ، ک) = -۱ اور نہا نہا ف (ھ، ک) = ۱
ک ← ۰ ھ ← ۰ ھ ← ۰ ک ← ۰

مثال :- م فرلا + ن فرما = ۰ . . . . (۱۸)

کے ٹھیک تفرقی ہونے کی ضروری شرط دفعہ ۵۵ کے مطابق ہے

$$\frac{جف\ م}{جف\ ما} = \frac{جف\ ن}{جف\ لا} \quad . . . . (۱۹)$$

کیونکہ اگر جملہ (۱۸) فرع کے مساوی ہو تو

$$م = \frac{جف\ ع}{جف\ لا} \quad اور \quad ن = \frac{جف\ ع}{جف\ ما} \quad . . . . (۲۰)$$

اور اس لئے (۱۹) کے دونوں جزوی تفرقات میں سے ہر ایک

$$\frac{جف^2\ ع}{جف\ ما\ جف\ لا} \quad یا \quad \frac{جف^2\ ع}{جف\ لا\ جف\ ما}$$

کے مساوی ہے ۔ اس مسئلہ کے عکس کے طور پر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر شرط (۱۹) صحیح ہے تو جملہ (۱۸) ٹھیک تفرقی ہوگا ۔

فرض کرو کہ و تفاعل ∫ م فرلا کو جس میں تکمل، ما کو مستقل مان کر نکالا گیا ہے ظاہر کرتا ہے

اس لئے $\frac{جف و}{جف لا} = م$ . . . . (۲۱)

اور $\frac{جف ن}{جف لا} = \frac{جف م}{جف ما} = \frac{جف^۲ و}{جف لا جف ما}$

یعنی $\frac{جف}{جف لا}\left(ن - \frac{جف و}{جف ما}\right) = ۰$ . . . . (۲۲)

اب دفعہ ۵۶ کے مطابق اس سے ظاہر ہے کہ لا کے لحاظ سے $ن - \frac{جف و}{جف ما}$ ۵۰۵

مستقل ہے، یعنی صرف ما کا تفاعل ہے۔ اسکی قیمت فَ(ما) سے ظاہر کرو تو

$ن = \frac{جف و}{جف ما} + فَ(ما)$ . . . . (۲۳)

اب اگر ہم لکھیں $ع = و + ف(ما)$ . . . . (۲۴)

تو نتائج (۲۱) اور (۲۳) سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{جف ع}{جف لا} = م$ اور $\frac{جف ع}{جف ما} = ن$ . . . . (۲۵)

اور اس لئے $م فرلا + ن فرما = فرع$ . . . . . . (۲۶)

۱۹۴ - ٹیلر کے مسئلہ کی توسیع :-

فرض کرو کہ فہ(لا، ما) متغیروں لا اور ما کا ایسا تفاعل ہے جو متغیروں کی زیر غور قیمتوں کے لئے مسلسل ہے اور کسی خاص نمبر تک اس کے مشتقات بھی مسلسل ہیں اور

فہ(ا + ھ، ب + ک) . . . . (۱)

کا پھیلاؤ ھ اور ک کی صعودی قوتوں میں درکار ہے۔ پہلے ہم ھ اور ک

میں دوسرے درجے کی رقموں تک پھیلاؤ کے حاصل کرنے کے سیدھے طریقے کو بیان کرینگے سب سے پہلے مسئلہ ٹیلر کی رو سے ھ کی قوتوں میں پھیلانے سے

$$\text{فیا}(ا+ھ، ب+ک) = \text{فیا}(ا، ب+ک) + ھ\,\text{فیا}_{لا}(ا، ب+ک)$$

$$+ \frac{ھ^2}{2}\,\text{فیا}_{لالا}(ا، ب+ک) + \cdots \quad (2)$$

نیز اسی مسئلہ سے

$$\left.\begin{aligned}
\text{فیا}(ا، ب+ک) &= \text{فیا}(ا، ب) + ک\,\text{فیا}_{ما}(ا، ب) + \frac{ک^2}{2}\,\text{فیا}_{ماما}(ا، ب) + \cdots \\
\text{فیا}_{لا}(ا، ب+ک) &= \text{فیا}_{لا}(ا، ب) + ک\,\text{فیا}_{لاما}(ا، ب) + \cdots \\
\text{فیا}_{لالا}(ا، ب+ک) &= \text{فیا}_{لالا}(ا، ب) + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(۳) کے نتائج کو (۲) میں درج کرنے سے

$$\text{فیا}(ا+ھ، ب+ک) = \text{فیا}(ا، ب) + \left[ھ\,\text{فیا}_{لا}(ا، ب) + ک\,\text{فیا}_{ما}(ا، ب)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[ھ^2\,\text{فیا}_{لالا}(ا، ب) + 2ھک\,\text{فیا}_{لاما}(ا، ب) + ک^2\,\text{فیا}_{ماما}(ا، ب)\right] + \cdots \quad (4)$$

اگر ہم ابتدائی پھیلاؤ میں دفعہ ۱۵۵ کے مطابق مختلف باقی رقموں کی شکل پر غور کریں تو ظاہر ہے کہ (۴) کی باقی رقم ذیل کے نمونہ کی ہوگی

$$\frac{1}{\underline{|3}}\left\{کب_1\,ھ^3 + 3\,کب_2\,ھ^2ک + 3\,کب_3\,ھک^2 + کب_4\,ک^3\right\} \quad (5)$$

جہاں $کب_1$، $کب_2$، $کب_3$، $کب_4$ اپنے تفاعل میں ا، ب، ھ، ک ہیں کہ جو ھ اور ک کو لاانتہا چھوٹے کرنے پر محدود رہتے ہیں پس ان ھ، ک کے تیسرے درجے تک مذکورہ بالا نتیجہ کی صداقت کی شرائط یہ ہیں کہ فیا(لا، یا) اور اسکے تیسرے رتبہ تک کے مشتقات متغیروں کی زیر غور تمام قیمتوں کے لئے

مسلسل ہیں۔ نتیجہ (۴) کو ذرا مختلف ترقیم میں ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{فا}(\text{لا}+\text{ھ}\text{، ما}+\text{ک}) = \text{فا}(\text{لا}\text{، ما}) + \left(\text{ھ}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\text{ھ}^2\frac{\text{جف}^2\text{ فا}}{\text{جف لا}^2} + 2\text{ھک}\frac{\text{جف}^2\text{ فا}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ک}^2\frac{\text{جف}^2\text{ فا}}{\text{جف ما}^2}\right) + \ldots (6)$$

جہاں بائیں جانب اختصار کے لئے فا (لا، ما) کی بجائے صرف فا لکھا گیا ہے۔ اس سے بھی زیادہ مختصر شکل یہ ہے

$$\text{فا}(\text{لا}+\text{ھ}\text{، ما}+\text{ک}) = \text{فا}(\text{لا}\text{، ما}) + (\text{ھ فا}_{\text{لا}} + \text{ک فا}_{\text{ما}})$$

$$+\frac{1}{2}(\text{ھ}^2\text{فا}_{\text{لا لا}} + 2\text{ھک فا}_{\text{لا ما}} + \text{ک}^2\text{فا}_{\text{ما ما}}) + \ldots\ldots (7)$$

نیز اگر ع متبوع متغیروں لا اور ما کا کوئی تفاعل ہو اور دفعہ ۵ کے مطابق متغیروں میں مف لا، مف ما کے اضافہ کی وجہ سے ع میں مف ع کا اضافہ ہو تو ضابطہ (۷) ذیل کے معادل ہے

$$\text{مف ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\text{ مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\text{ مف ما}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف لا}^2}(\text{مف لا})^2 + 2\frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف لا جف ما}}\text{ مف لا مف ما} + \frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف ما}^2}(\text{مف ما})^2\right] + \ldots$$

$$\ldots\ldots (8)$$

اس امر پر توجہ ڈالنا مناسب ہوگا کہ (۴) کے ثبوت میں

$$\text{فا}_{\text{ما لا}}(\text{ا، ب}) = \text{فا}_{\text{لا ما}}(\text{ا، ب}) \ldots\ldots (9)$$

کے فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہوئی۔

اگر ہم نے (۱) کے پھیلاؤ کو ھ کی بجائے پہلے ک کی قوتوں میں

متغیر تفاعل کی توسیع بالکل عیاں ہے۔ ان صورتوں میں جن میں تین یا زیادہ متبوع متغیر شریک ہوں اس نتیجہ کی

پھیلایا ہوتا تو (۴) کے مماثل نتیجہ حاصل ہوتا لیکن اسمیں فما (ا، ب) کی بجائے فما (ا، ب) نمودار ہوتا۔ اُن دو شکلوں کے مقابلہ سے دفعہ ۱۹۴ کے مسئلہ کا ایک مختلف ثبوت حاصل ہوجاتا ہے۔

۱۹۵۔ پھیلاؤ میں عام رقم: — پھیلاؤ (ہ) میں عام رقم دریافت کرنے کے لئے ایک مختلف طریقہ ذیل میں درج ہے۔

فرض کرو کہ ھ = عہ ت، ک = بہ ت اور

فا(ت) = فما(لا + ھ، ما + ک) = فما(لا + عہ ت، ما + بہ ت) ..(۱)

اس کو ت کا تفاعل فرض کرکے میکلورن کے مسئلہ سے پھیلایا جاسکتا ہے اور اسکی عام رقم ہوگی

$$\frac{ت^ن}{\lfloor ن} فا^{(ن)}(۰) \quad .... (۲)$$

۵۔۱۔ اگر تھوڑی دیر کے لئے ہم لا + عہ ت = ع اور ما + بہ ت = و فرض کریں تو

$$\frac{جف فما}{جف لا} = \frac{جف فما}{جف ع} \cdot \frac{جف ع}{جف لا} = \frac{جف فما}{جف ع}$$

$$\frac{جف فما}{جف ما} = \frac{جف فما}{جف و} \cdot \frac{جف و}{جف ما} = \frac{جف فما}{جف و} \quad .... (۳)$$

جس میں فما (ع، و) کی بجائے صرف فما لکھا گیا ہے۔

اب چونکہ $فا'(ت) = \frac{جف فما}{جف ع} \cdot \frac{جف ع}{جف ت} + \frac{جف فما}{جف و} \cdot \frac{جف و}{جف ت}$

$$= عہ \frac{جف فما}{جف لا} + بہ \frac{جف فما}{جف ما} = \left(عہ \frac{جف}{جف لا} + بہ \frac{جف}{جف ما}\right) فما(ع، و)$$

(۴) ....

آخری نتیجہ صریحاً ع اور و کا تفاعل ہے اور اوپر کی دلائل کے مکرر استعمال سے

$$\text{فا}(\text{ت}) = \left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)\left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)\text{فا}(\text{ع، و})$$

$$= \left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{2}\text{فا}(\text{ع، و}) \quad \ldots (5)$$

اور عموماً

$$\text{فا}^{(\text{ن})}(\text{ت}) = \left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{ن}}\text{فا}(\text{ع، و}) \quad \ldots (6)$$

جہاں کہ عامل $\left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{ن}}$ کو عاملات $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ کی خاصیت مبادل کی وجہ سے مسئلہ ثنائی سے پھیلایا جا سکتا ہے۔ چونکہ ت صرف مرکبات لا + عا ت اور ما + با ت میں نمودار ہوتا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ (۶) میں بائیں جانب کے تفرقوں کے عمل سے پہلے یا بعد ت = ۰ رکھنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔ اس لئے پھیلاؤ میں عام رقم ہوگی

$$\frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}\text{فا}^{(\text{ن})}(0) = \frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}\left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{ن}}\text{فا}(\text{لا، ما})$$

$$= \frac{1}{\lfloor\text{ن}}\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{ن}}\text{فا}(\text{لا، ما})$$

$$= \frac{1}{\lfloor\text{ن}}\left[\text{ھ}^{\text{ن}}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}}} + \text{ن ھ}^{\text{ن}-1}\text{ک}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}-1}\,\text{جف ما}}\right.$$

$$\left. + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{ھ}^{\text{ن}-2}\text{ک}^{2}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}-2}\,\text{جف ما}^{2}} + \ldots\right] \quad \ldots (7)$$

جہاں فا(لا، ما) کی بجائے فا لکھا گیا ہے۔

مثال:- ثابت کرو کہ اگر فا(لا، ما) متغیر لا، ما کا درجہ م کا تجانس

تفاعل ہے تو

$$\text{لا}\ \text{فا}_{\text{لا}} + \text{ما}\ \text{فا}_{\text{ما}} = \text{م}\ \text{فا} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اور

$$\text{لا}^{۲}\ \text{فا}_{\text{لالا}} + ۲\ \text{لا}\ \text{ما}\ \text{فا}_{\text{لاما}} + \text{ما}^{۲}\ \text{فا}_{\text{ماما}} = \text{م}(\text{م}-۱)\ \text{فا} \quad \ldots (۹)$$

درجہ م کے متجانس تفاعل کی عام تعریف یہ ہے کہ اگر لا اور ما کو کسی نسبت مہ میں بدلا جائے تو تفاعل $\text{مہ}^{\text{م}}$ کی نسبت میں بدل جاتا ہے۔

یعنی

$$\text{فا}(\text{لا مہ}،\ \text{ما مہ}) = \text{مہ}^{\text{م}}\ \text{فا}(\text{لا}،\ \text{ما}) \quad \ldots (۱۰)$$

۵۰۸

اس مساوات میں مہ = ۱ + ت درج کرو۔ اب نتیجہ (۸) سے

$$\text{فا}(\text{لا} + \text{لا ت}،\ \text{ما} + \text{ما ت}) = \text{فا}(\text{لا}،\ \text{ما})$$

$$+\ \text{ت}(\text{لا}\ \text{فا}_{\text{لا}} + \text{ما}\ \text{فا}_{\text{ما}}) + \tfrac{۱}{۲}\text{ت}^{۲}(\text{لا}^{۲}\ \text{فا}_{\text{لالا}} + ۲\ \text{لا ما}\ \text{فا}_{\text{لاما}} + \text{ما}^{۲}\ \text{فا}_{\text{ماما}}) + \ldots\ldots$$

اور مسئلہ ثنائی سے

$$(۱+\text{ت})^{\text{م}}\ \text{فا}(\text{لا}،\ \text{ما}) = \left[۱ + \text{م ت} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۲\times۱}\text{ت}^{۲} + \ldots\right]\text{فا}$$

ان دو نتیجوں میں ت اور $\text{ت}^{۲}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے ضابطہ (۹) اور (۱۰) حاصل ہو سکتے ہیں۔

عام طور پر، $\text{ت}^{\text{ن}}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے اور پھر (۷) استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}}} + \text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-۱}\text{ما}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}-۱}\text{جف ما}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\text{لا}^{\text{ن}-۲}\text{ما}^{۲}\times\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}-۲}\text{جف ما}^{۲}} + \ldots\ldots = \text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)\ \text{فا} \quad \ldots (۱۱)$$

یہ دو متبوع متغیروں کی صورت میں "متجانس تفاعلوں کا مسئلہ یولر" ہے۔ تین یا زیادہ متبوع متغیروں کی صورت میں اسکی توسیع بالکل عیاں ہے۔

۱۹۶ — دو متغیروں کے تفاعل کی اقل اور اعظم قیمتیں اور انکی ہندسی تعبیر۔

مسئلہ ٹیلر کی توسیع شدہ شکل کی مدد سے ہم دفعہ ۵۳ کے مطابق دو متبوع متغیر لا، ما کے تفاعل ع کی اعظم اور اقل قیمتوں کی بحث کی توسیع کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۱۹۴ (۸) سے ظاہر ہے کہ مف لا، مف ما کی مطلق قیمت کو مسلسل کم کیا جائے لیکن انکی نسبت کو مستقل رکھا جائے تو انتہا میں مف ع کی علامت وہی ہے جو ذیل کی ہے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ \text{مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\ \text{مف ما}\ \ldots\ldots\ (1)$$

لیکن اگر $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ دونوں صفر ہیں تو (۱) کی علامت مف لا اور مف ما کی علامت بدلنے سے بدل جاتی ہے۔ پس چند تغیرات کے لئے مف ع مثبت ہوگا اور باقی کے لئے منفی۔ بالفاظ دیگر ع کی اعظم یا اقل قیمت صرف اس وقت ہوگی جبکہ ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = 0\ \text{اور}\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = 0\ \ldots\ldots\ (2)^{*}$$

اب فرض کرو کہ شرط (۲) پوری ہوتی ہے تو

$$\text{مف ع} = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}(\text{مف لا})^2 + 2\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\ \text{مف لا مف ما}\right.$$

$$\left. + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}(\text{مف ما})^2\right] + \ldots\ldots\ (3)$$

اگر مف لا اور مف ما کافی چھوٹے ہیں تو مف ع کی علامت (۳) میں درج شدہ رقوم پر ہی منحصر ہوگی اور اعلیٰ تر رتبہ کی رقموں کا کوئی اثر نہیں پڑیگا۔ ۵۰۹

---

* دفعہ ۱۹۴ کی تحقیقات میں فرض کر لیا گیا ہے کہ دونوں مشتق مسلسل ہیں اور اسلئے محدود ہیں۔ یعنی ہم شروع ہی سے دفعہ ۵۱ میں غور کردہ صورت کی مشابہ دو ابعادی صورت کو خارج کر دیتے ہیں۔

اب علم الجبر اسے معلوم ہے کہ متجانس درجہ دوم کے تفاعل

$$ا طا^2 + ۲ ھ طا ضا + ب ضا^2 \quad \ldots\ldots (۴)$$

کی علامت ناتغیر پذیر ہے صرف اگر

$$ا ب > ھ^2 \quad \ldots\ldots (۵)$$

اور اس صورت میں جملہ کی علامت ا یا ب کی علامت ہے۔
اس سے اخذ ہو سکتا ہے کہ جب شرط (۲) پوری ہو تو امف لا اور امف ما کی کسی قیمتوں کے لئے جو ایک احاطہ کے باہر نہ ہوں مف ع کی علامت ایک ہی رہے گی بشرطیکہ

$$\frac{جف^2 ع}{جف لا^2} \cdot \frac{جف^2 ع}{جف ما^2} > \left(\frac{جف^2 ع}{جف لا\, جف ما}\right)^2 \quad \ldots\ldots (۶)$$

اور اس صورت میں مف ع کی علامت وہی ہو گی جو $\frac{جف^2 ع}{جف لا^2}$ یا $\frac{جف^2 ع}{جف ما^2}$ کی ہے۔ اور ع کی اعظم یا اقل قیمت $\frac{جف^2 ع}{جف لا^2}$ کے منفی یا مثبت ہونے پر منحصر ہو گی۔

اگر

$$\frac{جف^2 ع}{جف لا^2} \cdot \frac{جف^2 ع}{جف ما^2} < \left(\frac{جف^2 ع}{جف لا\, جف ما}\right)^2 \quad \ldots\ldots (۷)$$

تو کسر $\frac{مف ما}{مف لا}$ کی چند قیمتوں کے لئے ع کا اضافہ مثبت ہوگا اور چند کے لئے منفی۔ اس لئے ع کی قیمت اگرچہ دفعہ ۱۵ کے مطابق مقیم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔

اگر

$$\frac{جف^2 ع}{جف لا^2} \cdot \frac{جف^2 ع}{جف ما^2} = \left(\frac{جف^2 ع}{جف لا\, جف ما}\right)^2 \quad \ldots\ldots (۸)$$

تو (۳) کی بائیں جانب کی رقمیں مف لا اور مف ما میں ایک خطی جملہ کے مربع کے مثبت یا منفی کے مساوی ہیں اور اس لئے کسر

$\frac{\text{حف ما}}{\text{حف لا}^{3}}$ کی ایک خاص قیمت کے لئے یہ صفر ہوگی۔ اب چونکہ حف³ع تیسرے رتبہ کی مقدار ہے اس لئے عموماً اعظم یا اقل قیمت نہیں ہوگی لیکن اس سوال کا قطعی فیصلہ پھیلاؤ کی مزید رقموں پر غور کرنے کے بغیر نہیں کیا جاسکتا۔

اگر دوسرے رتبہ کے جزوی مشتق $\frac{\text{حف}^{2}\text{ع}}{\text{حف لا}^{2}}$ ، $\frac{\text{حف}^{2}\text{ع}}{\text{حف لا حف ما}}$ ، $\frac{\text{حف}^{2}\text{ع}}{\text{حف ما}^{2}}$ سب صفر ہوں تو اس صورت میں بھی یہی نتیجہ نکلتا ہے۔

مذکورہ بالا تحقیقات کی ہندسی تعبیر بہت دلچسپ ہے۔ اگر دفعہ ۳۱۳ کے مطابق ی سطح کا عمودی معین ہو اور لا، ما افقی مستوی میں مستطیلی محدد ہوں تو اعظم یا اقل بلندی والے نقطے کے لئے یہ شرط ہے

$$\frac{\text{حف ی}}{\text{حف لا}}=0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{حف ی}}{\text{حف ما}}=0 \qquad \ldots\ldots (۹)$$

چونکہ ان مساواتوں سے لازم ہوتا ہے کہ حف ی اضافوں حف لا اور حف ما میں دوسرے رتبہ کی مقدار ہے اسلئے نتیجہ نکلتا ہے کہ زیر غور نقطہ ف پر ہر عمودی تراش کا مماسی خط افقی ہوگا یعنی مماسی مستوی افقی ہوگا۔

۵۱۷

اس کے بعد ہمیں غور کرنا ہے کہ آیا سطح نقطہ ف کے مماسی مستوی کو کاٹتی ہے یا نہیں۔ اگر کوئی ایسا خط تقاطع ہے تو اس پر حف ی = ۰ اور اگر (۳) میں حف ما = م حف لا درج کریں اور انتہا میں حف لا کو صفر کردیں تو نقطہ ف پر منحنی تقاطع کے مماسی خطوط کی سمتیں ذیل سے حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{\text{حف}^{2}\text{ی}}{\text{حف ما}^{2}}\text{م}^{2}+۲\frac{\text{حف}^{2}\text{ی}}{\text{حف لا حف ما}}\text{م}+\frac{\text{حف}^{2}\text{ی}}{\text{حف لا}^{2}}=0 \qquad (۱۰)$$

م میں اس دو درجی مساوات کی اصلیں خیالی ہونگی اگر

$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}\ \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} > \left(\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (11)$$

اس صورت میں ن کی عین قربت میں زیر غور سطح مماسی مستوی کے صرف ایک طرف واقع ہوگی اور ن پر کا ہم ارتفاعی خط (Contour-line) صرف ایک نقطہ میں تحویل ہو جاتا ہے۔ اس نقطہ ن پر بلندی کی اعظم قیمت یا اقل قیمت کا ہونا $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}$ اور $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2}$ کے منفی یا مثبت ہونے پر منحصر ہے یعنی دفعہ ۶۷ کے مطابق اعظم قیمت ہوگی اگر مستوی ی لا اور ی ما کے متوازی عمودی تراشیں اوپر کی طرف محدب ہیں اور اقل قیمت اگر تراشیں مقعر ہیں۔ اگر لا اور ما محوروں کو انکے مستویوں میں گھما یا جائے تو اخذ ہوتا ہے کہ اس صورت میں ن میں سے گزرنے والی ہر عمودی تراش اوپر کی طرف بالترتیب محدب یا مقعر ہوگی۔

لیکن اگر

$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}\ \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} < \left(\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (12)$$

تو مساوات (۱۰) کی اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہیں۔ ہم ارتفاعی خط پر نقطہ ن عقدہ ہے اور اسکی دو شاخیں سطح کو دو حصوں میں بانٹ دیتی ہیں۔ سطح کا ایک حصہ مماسی مستوی کے اوپر واقع ہوگا اور ایک حصہ نیچے۔

اگر

$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}\ \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} = \left(\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (13)$$

تو مساوات (۱۰) کی اصلیں حقیقی اور مساوی ہیں۔ ہم ارتفاعی خط پر نقطہ ن عموماً قرنی نقطہ ہے اور اس سوال کا جواب کہ اس صورت میں ن کی بلندی اعظم ہے یا اقل بغیر مزید تحقیق کے نہیں دیا جا سکتا۔

مثال ۱:- فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{لا}^3 - 3\,\text{ا}\,\text{لا}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{ما}^2 + \text{ج} \quad \ldots\ldots (14)$

اس سے $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = 3\,\text{لا}(\text{لا} - 2\,\text{ا})$ ، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = -8\,\text{ا}\,\text{ما} \quad \ldots\ldots (15)$

اور $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} = ٦(\text{لا}^2 - \text{ا}^2)$، $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = ٠$، $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2} = -٨\text{ا}^2$ .. (١٦)

شرائط (٩) پوری ہوتی ہیں جبکہ لا = ٠، ما = ٠۔ یا لا = ٢ ا، ما = ٠۔ اصلوں کا پہلا جوڑا اتساوات (١١) کو پورا کرتا ہے اور چونکہ $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2}$ منفی ہے اس لئے اس نقطہ پر ی کی اعظم قیمت ہے۔ اصلوں کا دوسرا جوڑا اتساوات (١٢) کو پورا کرتا ہے اس لئے ی کی اعظم یا اقل قیمت نہیں ہے۔ اس مثال کے ہم ارتفاعی خطوط جلد دوم صفحہ ٣٩٢ شکل ٦٩ میں دکھائے گئے ہیں۔

سوال ٢:- فرض کرو کہ $\text{ی} = (\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2 - ٢\text{ا}^2(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) + \text{ج}$ .... (١٧)

$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ٤\text{لا}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2)$، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ٤\text{ما}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ا}^2)$ ... (١٨)

$\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} = ٤(٣\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2)$، $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = ٨\text{لا ما}$، $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2}$

$= ٤(\text{لا}^2 + ٣\text{ما}^2 + \text{ا}^2)$ ..... (١٩)

٥١١

اس صورت میں مساوات (٩) کی حقیقی اصلیں یہ ہیں لا = ٠، ما = ٠۔ اور لا = ا، ما = ٠۔ اصلوں کا پہلا جوڑا رشتہ (١٢) کو پورا کرتا ہے اور اس لئے ی کی اعظم یا اقل قیمت اس نقطہ پر نہیں ہے۔ اصلوں کا دوسرا جوڑا لا = ± ا، ما = ٠۔ شرط (١١) کو پورا کرتا ہے اور چونکہ ان قیمتوں کے لئے $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2}$ مثبت ہے اس لئے ی کی اقل قیمت ہوگی۔ سطح (١٧) کے ہم ارتفاعی خطوط جلد دوم صفحہ ٤٠٣ کی شکل ١٠٦ میں دکھائے گئے ہیں سطح میں دو خلا[1] ہیں اور ان کے درمیان ایک ڈنڈا[2] ہے اگر مساوات (١٧) کی بائیں جانب کی علامت بدل دی جائے تو خلا کی بجائے سطح کی دو چوٹیاں[3] ہونگی اور انکے درمیان گزرگاہ ہوگی۔

Peaks [3] Bar [2] Hollows [1]

۱۹۷۔ مشروط تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں۔

سوال یہ ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یعنی مقیم قیمتیں ایسے تفاعل کی دریافت کیجائیں جو ن متغیروں کا تفاعل ہو لیکن اس کے تمام متغیر غیر تابع نہ ہوں بلکہ م معلومہ رشتوں سے وابستہ ہوں (ن > م) اقل اور اعظم کے امتیاز کرنے کے طریقہ پر اس دفعہ میں غور نہیں کیا جائیگا۔ ان مقیم قیمتوں میں اصولاً م معلومہ رشتوں کی مدد سے تفاعل میں سے م متغیروں کو ساقط کر سکتے ہیں اور تب تفاعل صرف (ن - م) غیر تابع متغیروں کا تفاعل رہ جائے گا لیکن عملی طور پر یہ طریقہ اگر ناممکن نہ بھی ہو تو بھی بہت طویل ہوگا اس مشکل کو حل کرنے کے لئے غیر معین ضاربوں کا طریقہ ابتداءً میں لگرانج نے دریافت کیا تھا۔ ان صورتوں میں جبکہ دیا ہوا تفاعل اور معلومہ رشتے متشاکل سے چلے ہیں یہ طریقہ از حد مفید ہے۔

ذیل کی مثالوں سے یہ طریقہ کافی طور پر واضح ہو جائیگا۔

(آ) فرض کرو کہ ع ایک تفاعل ہے

$$ع = فما(لا، ما، ی) \quad ....(۱)$$

جبکہ لا، ما، ی رشتہ

$$ف(لا، ما، ی) = ۰ \quad ....(۲)$$

سے وابستہ ہیں۔ اس امر سے کہ مف ع = ۰ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{جف\, فما}{جف\, لا}مف\, لا + \frac{جف\, فما}{جف\, ما}مف\, ما + \frac{جف\, فما}{جف\, ی}مف\, ی = ۰ \quad (۳)$$

لا انتہا چھوٹے تغیرات مف لا، مف ما، مف ی سب ایکدوسرے کے غیر تابع نہیں ہیں بلکہ ذیل کے رشتہ سے وابستہ ہیں

$$\frac{جف\, ف}{جف\, لا}مف\, لا + \frac{جف\, ف}{جف\, ما}مف\, ما + \frac{جف\, ف}{جف\, ی}مف\, ی = ۰ \quad (۴)$$

کیونکہ مف ف = ۰۔

اِن نتائج میں سے مف ی کو ساقط کر سکتے ہیں۔ تب حاصل اسقاط میں مف لا، مف ما کو غیر تابع فرض کر سکتے ہیں اور انکے سروں کو علیحدہ علیحدہ صفر رکھ سکتے ہیں۔ اس سے زیادہ متشاکل طریقہ یہ ہوگا کہ (۳) اور (۴) سے ذیل کی مساوات بنائی جائے

$$\left(\frac{جف\,ف}{جف\,ما} - لہ\frac{جف\,فہ}{جف\,ما}\right)مف\,ما + \left(\frac{جف\,ف}{جف\,لا} - لہ\frac{جف\,فہ}{جف\,لا}\right)مف\,لا$$

$$+\left(\frac{جف\,ف}{جف\,ی} - لہ\frac{جف\,فہ}{جف\,ی}\right)مف\,ی = ۰ \quad (۵)$$

512 اس وقت تک لہ کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ لیکن اب ہم فرض کرتے ہیں کہ لہ کی قیمت اس شرط سے دریافت کی جاتی ہے کہ ان محدد فرقوں میں سے ایک کا سر صفر ہو۔ فرض کرو کہ مف ی کا سر صفر ہے۔ اب چونکہ مف لا اور مف ما میں کوئی لازمی تعلق نہیں ہے اس لئے ان کے سر بھی جداگانہ صفر ہونگے۔ اس سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{جف\,ف}{جف\,لا} = لہ\frac{جف\,فہ}{جف\,لا}\ ،\ \frac{جف\,ف}{جف\,ما} = لہ\frac{جف\,فہ}{جف\,ما}\ ،\ \frac{جف\,ف}{جف\,ی} = لہ\frac{جف\,فہ}{جف\,ی} \quad \ldots\ldots (۶)$$

ان تین مساواتوں اور مساوات (۲) سے چار ہمزاد مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے چار غیر معلوم مقداریں لا، ما، ی، لہ دریافت ہو سکتی ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ $ع = فہ(لا، ما، ی) \quad \ldots\ldots (۷)$

جبکہ متغیرات ان دو رشتوں سے وابستہ ہیں

$فا(لا، ما، ی) = ۰$ اور $ف(لا، ما، ی) = ۰ \quad (۸)$

مذکورہ بالا طریقہ پر عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(جف فہ/جف لا − لہ جف قا/جف لا − مہ جف ف/جف لا) صف لا + (جف فہ/جف ما − لہ جف قا/جف ما − مہ جف ف/جف ما) صف ما + (جف فہ/جف ی − لہ جف قا/جف ی − مہ جف ف/جف ی) صف ی = ۰ ....(۹)

جہاں لہ اور مہ غیر معین ضارب ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ انہیں اس طرح چن لیا گیا ہے کہ صف ما اور صف ی کے سر صفر ہیں۔ اسلئے صف لا کا سر بھی صفر ہوگا۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

جف فہ/جف لا = لہ جف قا/جف لا + مہ جف ف/جف لا ، جف فہ/جف ما = لہ جف قا/جف ما + مہ جف ف/جف ما ، جف فہ/جف ی = لہ جف قا/جف ی + مہ جف ف/جف ی .....(۱۰)

ان تین مساواتوں اور (۸) کی دو مساواتوں سے پانچ غیر معلوم مقداریں لا، ما، ی، لہ، مہ دریافت ہو سکتی ہیں۔

مثال (۱) ع = لا² + ما² ....(۱۱)

کی قائم قیمتیں اس شرط کے ماتحت دریافت کرو کہ

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۱ ....(۱۲)

یہ سوال مرکزی مخروطیوں کے صدر محوروں کو دریافت کرنے کا ہے۔ اس طریقہ سے حاصل ہوتا ہے

لا = لہ (ا لا + ھ ما)، ما = لہ (ھ لا + ب ما) ....(۱۳)

انہیں بالترتیب لا اور ما سے ضرب دیکر جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ع = لہ ....(۱۴)

پس (ا ع − ۱) لا + ھ ع ما = ۰ اور ھ ع لا + (ب ع − ۱) ما = ۰ (۱۵)

نسبت لا : ما کو ساقط کرنے سے

(ا ب − ھ²) ع² − (ا + ب) ع + ۱ = ۰ ......(۱۶)

۵۱۲

نیز ع کو ساقط کرنے سے

ھ (لا^2 - ما^2) = (ا - ب) لا ما . . . . . . (۱۷)

مثال (۲) ع = لا^2 + ما^2 + ی^2 . . . . (۱۸)

کی قائم قیمتیں دریافت کرو جبکہ

ا لا^2 + ب ما^2 + ج ی^2 = ۱ اور ل لا + م ما + ن ی = ۰ (۱۹)

یہ سوال مخروطی نما سطح کی مرکزی مستوی تراش کے صدر محاور دریافت کرنیکا ہے

ہم حاصل کر سکتے ہیں

لا = لہ ا لا + مہ ل، ما = لہ ب ما + مہ م، ی = لہ ج ی

+ مہ ن . . . . (۲۰)

انہیں بالترتیب لا، ما، ی سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

ع = لہ . . . . (۲۱)

پس لا + $\frac{مہ ل}{ا ع - ۱}$ = ۰، ما + $\frac{مہ م}{ب ع - ۱}$ = ۰، ی + $\frac{مہ ن}{ج ع - ۱}$ = ۰ (۲۲)

انہیں بالترتیب ل، م، ن سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$\frac{ل^2}{ا ع - ۱}$ + $\frac{م^2}{ب ع - ۱}$ + $\frac{ن^2}{ج ع - ۱}$ = ۰ . . . . . . (۲۳)

جو ع میں دو درجی مساوات ہے۔ اگر ع اسکی ایک اصل ہو تو

لا : ما : ی نسبتوں کی مماثل قیمتیں (۲۲) سے حاصل ہو سکتی ہیں

یعنی لا : ما : ی = $\frac{ل}{ا ع - ۱}$: $\frac{م}{ب ع - ۱}$: $\frac{ن}{ج ع - ۱}$ . . . . . (۲۴)

۱۹۸ — لفاف: - گذشتہ دفعہ کے طریقہ کے بالکل مماثل

طریقہ ایسے منحنی کے لفاف دریافت کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے

جس کی مساوات میں ن متبدل ہیں جو (ن - ۱) رشتوں سے

وابستہ ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ فا(لا، ا، عا، با) = ... (۱)

کا لفاف مطلوب ہے جبکہ عا اور با رشتہ ف(عا، با) = . سے وابستہ ہیں۔ منحنی (۱) اور اس کے متصل منحنی کے مقام تقاطع پر

فا(لا، ا، عا + مف عا، با + مف با) ۔ فا(لا، ا، عا، با) = . (۳) . . . . . .

یعنی انتہا میں $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف عا}}$ مف عا + $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف با}}$ مف با = . (۴)

۵۱۴ اب تغیرات مف عا اور مف با میں یہ رشتہ ہے

$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف عا}}$ مف عا + $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف با}}$ مف با = ... (۵)

اسلئے ($\frac{\text{جف فا}}{\text{جف عا}}$ ۔ لما $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف عا}}$) مف عا + ($\frac{\text{جف فا}}{\text{جف با}}$

۔ لما $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف با}}$) مف با = . (۶)

اگر لما کو ہم اس شرط سے دریافت کریں کہ مف با کا سر صفر ہو تو ظاہر ہے کہ مف عا کا سر بھی صفر ہوگا۔ تب

$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف عا}}$ ۔ لما $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف عا}}$ = . ، $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف با}}$ ۔ لما $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف با}}$ = . (۷)

انتہائی نقاطِ تقاطع کے طریق کی مساوات (۱)، (۲) اور (۷) میں سے عا، با، لما ساقط کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال (۱) :- خط $\frac{\text{لا}}{\text{عا}}$ + $\frac{\text{ا}}{\text{با}}$ = ۱ ، . . . . (۸)

کے لفاف کی مساوات دریافت کرو جبکہ

عا^2 + با^2 = ا^2 . . . . (۹)

اس طریقہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{عہ}^{2}} = \text{لہ عہ}\text{، } \frac{\text{ما}}{\text{بہ}^{2}} = \text{لہ بہ} \quad \ldots (۱۰)$$

اس لئے $\text{لہ}(\text{عہ}^{2} + \text{بہ}^{2}) = \frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{بہ}} = ۱$

یعنی $\text{لہ} = \frac{۱}{\text{عہ}^{2} + \text{بہ}^{2}} = \frac{۱}{\text{ر}^{2}} \quad \ldots (۱۱)$

پس $\text{عہ}^{۳} = \text{ر}^{2}\text{لا}\text{، } \text{بہ}^{۳} = \text{ر}^{2}\text{ما} \quad \ldots (۱۲)$

اس سے حاصل شدہ عہ اور بہ کی قیمتیں (۹) میں درج کرنے سے $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ر}^{\frac{2}{3}}$ (دیکھو دفعہ ۱۴۵ کی مثال ۲)۔

مثال ۲:- $\text{عہ لا} + \text{بہ ما} = ۱ \quad \ldots (۱۳)$

کا لفاف دریافت کرو جبکہ

$$\text{عہ بہ} + \text{ا عہ} + \text{ب بہ} + \text{ج} = ۰\text{، } \quad \ldots (۱۴)$$

ہمیں ان مساواتوں اور ذیل کی دو مساواتوں میں سے عہ، بہ اور لہ کو ساقط کرنا ہے

$$\text{لا} = \text{لہ}(\text{بہ} + \text{ا})\text{، } \text{ما} = \text{لہ}(\text{عہ} + \text{ب}) \quad \ldots (۱۵)$$

لہ کو ساقط کرنے سے $\text{عہ لا} - \text{بہ ما} = \text{ا ما} - \text{ب لا}$

اسے (۱۳) کے ساتھ شریک کرنے سے

$$\text{عہ لا} = \frac{۱}{۲}(\text{ا ما} - \text{ب لا} + ۱)\text{، } \text{بہ ما} = \frac{۱}{۲}(\text{ب لا} - \text{ا ما} + ۱) \quad \ldots (۱۶)$$

عہ اور بہ کی ان قیمتوں کو (۱۴) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ب لا} - \text{ا ما})^{2} + ۴\text{ج لا ما} + ۲(\text{ا ما} + \text{ب لا}) + ۱ = ۰ \quad (۱۷)$$

جو مطلوبہ لفافے کی مساوات ہے۔

۱۹۹- جزوی تفرق کے اطلاقات:- ہندسی اور طبیعی سوالات میں جزوی تفرق کے متعدد مسئلے اکثر پیش آتے ہیں

۵۱۵

بطور قاعدہ کے کہا جا سکتا ہے کہ جیسے یہ پیدا ہوں انکے حل پر غور کرنا مفید ہوگا۔ اب ہم ایک دو اسان صورتوں پر غور کریں گے جن سے چند ایسی باتیں واضح ہو جائینگی جنکو ہمیشہ مد نظر رکھنا چاہیے۔

(۱) فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{فا}(\text{و})$ .... (۱)

جہاں و متبوع متغیر لا، ما کا تفاعل ہے۔ اور فرض کرو کہ ع کے متواتر جزوی مشتقات بلحاظ لا، ما کے مطلوب ہیں۔

اب دفعہ ۳۲ سے $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{فا}'(\text{و})\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ ،

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{فا}'(\text{و})\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

نیز $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} = \left[\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\text{فا}'(\text{و})\right]\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \text{فا}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا}^2}$

$$= \text{فا}''(\text{و})\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right)^2 + \text{فا}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا}^2} \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} = \left[\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\text{فا}'(\text{و})\right]\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \text{فا}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا جف ما}}$$

$$= \text{فا}''(\text{و})\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{فا}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا جف ما}} \quad \ldots (۴)$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \left[\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\text{فا}'(\text{و})\right]\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{فا}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ما}^2}$$

$$= \text{فا}''(\text{و})\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right)^2 + \text{فا}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ما}^2} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اور علیٰ ہذا۔

(۲) فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{فا}(\text{لا، ما})$ .... (۶)

جہاں لا اور ما مجموعہ ع متغیرت کے دیے ہوئے تفاعل ہیں۔ اور ع کے مشتقات بلحاظ ت کے دریافت طلب ہیں۔

اب دفعہ ۵۹ (آ) سے

$$\frac{\text{فر ع}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \quad \ldots\ldots(۷)$$

دوبارہ تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ع}}{\text{فر ت}^{2}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر ت}^{2}}$$

$$+ \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\right)\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\right)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \quad \ldots(۸)$$

اب مذکورہ مسئلہ سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\right)\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\right)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}$$

اور

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\right)\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\right)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}$$

اب (۸) میں درج کر کے دفعہ ۱۹۳ کے مطابق قانون متبادلہ کے استعمال سے ۵۱۶

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ع}}{\text{فر ت}^{2}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر ت}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\,\text{فا}}{\text{جف لا}^{2}}\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)^{2}$$

$$+ 2\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{فا}}{\text{جف لا جف ما}}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{جف}^{2}\,\text{فا}}{\text{جف ما}^{2}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\right)^{2} \quad \ldots(۹)$$

اس طریقہ کو جاری رکھا جا سکتا ہے لیکن اس سے زیادہ بڑھنے کی شاذ ہی ضرورت پڑتی ہے۔

بعض اوقات حرکیاتی سوال میں تغیر ... کی ضرورت پڑتی ہے۔ بطور مثال فرض کرو کہ دو ابعاد میں کارتیسی محددوں سے قطبی محددوں میں تبدیل کرنا ہے یعنی

لا = ر جم طا ، ما = ر جب طا

مذکورہ بالا طریقہ سے $\frac{\text{ف}^2 \text{لا}}{\text{ف ت}^2}$ اور $\frac{\text{ف}^2 \text{ما}}{\text{ف ت}^2}$ کو ر اور طا کے مشتقات (بلحاظ ت کے) کی رقموں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

مثال:- فرض کرو کہ ی = فا (لا - ج ت) + خا (لا + ج ت) ...(۱۰)

جہاں متغیرات لا اور ت غیر تابع ہیں۔

اختصار کے لئے لا - ج ت = ع اور لا + ج ت = و رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ = فا' (ع) + خا' (و) ، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$ = - ج فا' (ع) + ج خا' (و)

(۱۱) ....

اور $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2}$ = فا'' (ع) + خا'' (و) ، $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ت}^2}$ = ج^2 فا'' (ع) + ج^2 خا'' (و)

(۱۲) ....

اس لئے $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ت}^2}$ = ج^2 $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2}$ ....(۱۳)

۲۰۰ - تضمینی تفاعل کا تفرق:- فرض کرو کہ ما متغیر لا کا تفاعل ہے جو تضمینی طور پر مساوات

فا (لا ، ما) = ۰ ....(۱)

سے بیان کیا گیا ہے۔ ما کے متواتر مشتقات بلحاظ لا کے دریافت طلب ہیں۔

دفعہ ۵۹ کے مطابق

بنا بریں

جف فا / جف لا + (جف فا / جف ما) (فر ما / فر لا) = ۰ .... (۲)

اگر اسے بلحاظ لا کے تفرق کریں تو

فر/فر لا (جف فا / جف لا) + فر/فر لا (جف فا / جف ما) فر ما / فر لا + (جف فا / جف ما) فر² ما / فر لا² = ۰ .... (۳)

۵۱۷

اب دفعہ ۵۹ سے

فر/فر لا (جف فا / جف لا) = جف/جف لا (جف فا / جف لا) + جف/جف ما (جف فا / جف لا) فر ما / فر لا

فر/فر لا (جف فا / جف ما) = جف/جف لا (جف فا / جف ما) + جف/جف ما (جف فا / جف ما) فر ما / فر لا

اس لئے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

جف² فا / جف لا² + ۲ (جف² فا / جف لا جف ما) فر ما / فر لا + (جف² فا / جف ما²) (فر ما / فر لا)² + (جف فا / جف ما) فر² ما / فر لا² = ۰ .... (۴)

اگر (۲) سے حاصل شدہ فر ما / فر لا کی قیمت اسمیں درج کر دیں تو

فر² ما / فر لا² = − (فا لالا فا ما² − ۲ فا لاما فا لا فا ما + فا ماما فا لا²) / فا ما³ .... (۵)

(۴) کو پھر تفرق کر کے فر ما / فر لا اور فر² ما / فر لا² کی قیمت درج کرنے سے فر³ ما / فر لا³ کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے اور اسی طرح اعلیٰ رتبہ کے مشتقوں کیلئے۔

ضابطہ (۵) سے ایسے منحنیات کے انحنا کے لئے جملہ حاصل ہو جاتا ہے جنکی مساوات قائم محددون میں (۱) سے بیان کی گئی ہو۔

یعنی $\frac{1}{\text{ر}} = - \frac{\text{فہ}_{\text{لالا}}\,\text{فہ}_{\text{ما}}^{2} - 2\,\text{فہ}_{\text{لاما}}\,\text{فہ}_{\text{لا}}\,\text{فہ}_{\text{ما}} + \text{فہ}_{\text{ماما}}\,\text{فہ}_{\text{لا}}^{2}}{\left(\text{فہ}_{\text{لا}}^{2} + \text{فہ}_{\text{ما}}^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ . . . (۶)

نقطہ انعطاف کے لئے شرط (۵) کی بائیں جانب کے شمار کنندہ کو صفر رکھنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

یہ ظاہر ہوگا کہ ضابطہ (۴) گذشتہ دفعہ ۱۹۹ کے ضابطہ (۹) میں ن = لا اور ع = ۰ رکھنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۱۰۲ — متغیر کا بدلنا

(۱) ایک متغیر کے تفاعل کی صورت میں تابع اور غیر تابع متغیروں کو باہم بدل دینا مطلوب ہے۔

دفعہ ۳۴ سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^{-1}$ . . . . (۱)

اس لئے $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^{-1} = \frac{\text{فر}}{\text{فر ما}}\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^{-1}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

$= -\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^{-3}\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فر ما}^{2}}$ . . . . (۲)

اسی طرح اعلیٰ مشتقوں کے لئے۔

(۲) فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{فہ}(\text{طا}، \text{عا})$ . . . . (۳)

جہاں طا، عا متبوع متغیر لا اور ما کے معلومہ تفاعل ہیں اور ع کے دوسرے متغیروں کے جزوی مشتقات بلحاظ لا اور ما دریافت طلب ہیں۔

دفعہ ۵۱۸ سے $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$

$= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}$ . . . . . (۴)

اس لئے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{طا}}{\text{جف لا}^2}+\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\right.$$

$$\left.+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\right)\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{عا}}{\text{جف لا}^2}$$

$$+\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\right)\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}$$

$$=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2}\left(\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\right)^2+2\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}$$

$$+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}\left(\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\right)^2+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{طا}}{\text{جف لا}^2}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{عا}}{\text{جف لا}^2}$$

(۵) . . . .

اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}}$$

$$+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\left(\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}+\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\right)$$

$$+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{طا}}{\text{جف لا جف ما}}$$

$$+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{عا}}{\text{جف لا جف ما}}\quad\ldots(۶)$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2}\left(\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}}\right)^2+2\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}$$

$$+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}\left(\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}\right)^2+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{طا}}{\text{جف ما}^2}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{عا}}{\text{جف ما}^2}$$

(۷) . . . .

مثال ۱:- ایک ذرہ رفتار کے مکعب کے متناسب مزاحمت کے زیر عمل حرکت کر رہا ہے اس کی مساوات حرکت ہے

$$\frac{ف^2 لا}{ف ت^2} = -ک\left(\frac{ف لا}{ف ت}\right)^3 \quad \ldots\ldots (۸)$$

اگر ترقیم کے فرق کو مدنظر رکھا جائے تو (۲) سے فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف^2 ت}{ف لا^2} = +ک \quad \ldots\ldots (۹)$$

اسلئے $$ت = \frac{1}{2} ک لا^2 + ا لا + ب \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

مثال ۲:- جملہ $$\frac{جف^2 ع}{جف لا^2} + \frac{جف^2 ع}{جف ما^2} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

کو قائم محددوں سے قطبی محددوں میں تبدیل کرو۔

لا = ر جم طہ اور ما = ر جب طہ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\left.\begin{aligned} \frac{جف ع}{جف ر} &= \frac{جف ع}{جف لا}\frac{جف لا}{جف ر} + \frac{جف ع}{جف ما}\frac{جف ما}{جف ر} = جم طہ \frac{جف ع}{جف لا} + جب طہ \frac{جف ع}{جف ما} \\ \frac{جف ع}{جف طہ} &= \frac{جف ع}{جف لا}\frac{جف لا}{جف طہ} + \frac{جف ع}{جف ما}\frac{جف ما}{جف طہ} = ر\left(-جب طہ \frac{جف ع}{جف لا} + جم طہ \frac{جف ع}{جف ما}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (۱۳)$$

اس لئے $$\frac{جف ع}{جف لا} = جم طہ \frac{جف ع}{جف ر} - جب طہ \frac{جف ع}{ر جف طہ}$$

$$\frac{جف ع}{جف ما} = جب طہ \frac{جف ع}{جف ر} + جم طہ \frac{جف ع}{ر جف طہ} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

اسلئے
$$\left.\begin{aligned} \frac{جف^2 ع}{جف لا^2} &= \left(جم طہ \frac{جف}{جف ر} - جب طہ \frac{جف}{ر جف طہ}\right)\left(جم طہ \frac{جف ع}{جف ر} - جب طہ \frac{جف ع}{ر جف طہ}\right) \\ \frac{جف^2 ع}{جف ما^2} &= \left(جب طہ \frac{جف}{جف ر} + جم طہ \frac{جف}{ر جف طہ}\right)\left(جب طہ \frac{جف ع}{جف ر} + جم طہ \frac{جف ع}{ر جف طہ}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (۱۵)$$

اس میں مندرجہ تمام عاملوں کا عمل کرنا ضروری نہیں ہے کیونکہ جملہ (۱۱) کے

حاصل جمع میں بہت سی رقمیں کٹ جائیں گی۔ باقی رقموں سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف ما}^2} = \frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف ر}^2} + \frac{۱}{ر}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} + \frac{۱}{ر^2}\frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف طہ}^2} \quad ......(۱۲)$$

امثلہ نمبر ۹۴

(جزوی تفرق اور ٹھیک تفرقے)

(۱) اگر $ع = \frac{\text{لا ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$ تو تصدیق کرو کہ $\text{لا}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = ع$

اور $\text{لا}^2\frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف لا}^2} + ۲\,\text{لا ما}\frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ما}^2\frac{\text{جف}^2 ع}{\text{جف ما}^2} = ۰$

(۲) اگر $ی = \text{لا}^2\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{ما}^2\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2 ی}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{لا}^2 - \text{ما}^2}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

(۳) اگر $ی = \text{فا}(\text{لا}) + \text{ف}(\text{ما})$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2 ی}{\text{جف لا جف ما}} = ۰$

نیز اسکا عکس ثابت کرو یعنی اگر $\frac{\text{جف}^2 ی}{\text{جف لا جف ما}} = ۰$ تو ی مذکورہ بالا شکل کا ہوگا

(۴) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{جف}^2 \text{فہ}}{\text{جف ر}^2} + \frac{۱}{ر}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}} + \frac{۱}{ر^2}\frac{\text{جف}^2 \text{فہ}}{\text{جف طہ}^2} = ۰$ پوری ہوتی ہے

اگر $\text{فہ} = \left(\text{ا}\,ر^{ن} + \frac{ب}{ر^{ن}}\right)\text{جم}\,ن(\text{طہ} - \text{ھہ})$

(۵) ثابت کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)(\text{لا فرلا} + \text{ما فرما}) + \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)(\text{لا فرما} - \text{ما فرلا}) = ۰$ ۵۲۰

کے نمونے کی مساوات $(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)$ سے تقسیم کرنے سے ٹھیک مساوات بن جاتی ہے

(۶) ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف ما فر لا - جف لا فر ما}}{\text{جم ما - جم لا}}$ ٹھیک تفرقی ہے تفاعل ع کا نیز ع دریافت کرو۔

(۷) اگر $\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف ما}^2} = ۰$ تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خا وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف خا}}{\text{جف ما}} \text{ ، } \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = +\frac{\text{جف خا}}{\text{جف لا}}$$

اور

$$\frac{\text{جف}^2\text{خا}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{خا}}{\text{جف ما}^2} = ۰$$

(۸) اگر $\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف ر}^2} + \frac{۱}{\text{ر}}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ر}} + \frac{۱}{\text{ر}^2}\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف طا}^2} = ۰$

تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خا وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ر}} = -\frac{\text{جف خا}}{\text{ر جف طا}} \text{ ، } \frac{\text{جف فا}}{\text{ر جف طا}} = \frac{\text{جف خا}}{\text{جف ر}}$$

اور تفاعل خا بھی اسی جزوی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے جسکو فا پورا کرتا ہے۔

(۹) اگر $\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف ما}^2} + \frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = ۰$

تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خا ایسا وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = -\frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{جف خا}}{\text{جف ما}} \text{ ، } \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{جف خا}}{\text{جف لا}}$$

اور

$$\frac{\text{جف}^2\text{خا}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{خا}}{\text{جف ما}^2} - \frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{جف خا}}{\text{جف ما}} = ۰$$

امثلہ ۶۵

(اعظم اور اقل قیمتیں)

(۱) ثابت کرو کہ سطح ا ری = لا^2 − ما^2 کا معین (ی) نقطہ لا = ۰، ما = ۰ پر قائم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔
اس سطح کے اہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔

(۲) دفعہ ۱۹۶ کے ضابطہ سے ثابت کرو کہ کم از کم سطح والا متوازی السطوح جبکہ حجم دیا ہوا ہو ایک مکعب ہوتا ہے۔

(۳) اگر ا، ب، ج ایک مثلث کے راس ہوں اور ن کوئی متغیر نقطہ ہو تو ن ا^2 + ن ب^2 + ن ج^2 کا حاصل جمع اقل ہوگا جب کہ ن نقاط ا، ب، ج کے اوسط مرکز پر منطبق ہوگا۔

(۴) سوال (۳) کی ترمیم سے م$_1$ ن ا^2 + م$_2$ ن ب^2 + م$_3$ ن ج^2 کی قیمت اقل ہوگی جبکہ ن، نقاط ا، ب، ج پر واقع تین ذروں م$_1$، م$_2$، م$_3$ کے مرکز کمیت پر منطبق ہوگا۔

(۵) بتاؤ کہ لا، ما کی کس قیمت کے لئے سطح ی = لا^3 + ما^3 − ۳ ا لا ما کا معین قائم ہوگا۔
[یہ قیمتیں (ا، ا) اور (۰، ۰) ہیں۔ لیکن دوسری قیمت کے لئے ی اعظم یا اقل نہیں ہے]

(۶) ثابت کرو کہ سطح ج^2 ی = ا ما^2 − لا^3 کا معین نقطہ لا = ۰، ما = ۰ پر قائم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔ ہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔

(۷) بتاؤ کہ لا، ما کی کن قیمتوں کے لئے تفاعل لا^4 + ما^4 − ۲ (لا − ما)^2 قائم ہے۔

مستحیل ہو جاتی ہے اس مساوات میں

$$\frac{فر^2 ما}{فر طہ^2} + ا^2 ما = ۰$$

(۲) $لا^2 = ۴ ت$ رکھنے سے مساوات $\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + \frac{1}{لا}\frac{فر ما}{فر لا} + ما = ۰$

تبدیل ہو جاتی ہے اس مساوات میں

$$ت\frac{فر^2 ما}{فر ت^2} + \frac{فر ما}{فر ت} + ما = ۰$$

(۳) اگر $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$

تو ثابت کرو کہ $ع - \frac{۳ ق^2}{ر} = \frac{(ا ب - ھ^2) ما + ا ف - گ ھ}{(ا ب - ھ^2) لا + ب گ - ھ ف}$

جہاں $ع = \frac{فر ما}{فر لا}$ ، $ق = \frac{فر^2 ما}{فر لا^2}$ اور $ر = \frac{فر^3 ما}{فر لا^3}$

(۴) اگر $ع = ف\left(\frac{ما}{لا}\right)$ تو ثابت کرو کہ $لا \frac{جف ع}{جف لا} + ما \frac{جف ع}{جف ما} = ۰$

اور $\frac{جف^2 ع}{جف لا^2} + \frac{جف^2 ع}{جف ما^2} = \frac{1}{لا^4}\left\{(لا^2 + ما^2) فَ َ\left(\frac{ما}{لا}\right)\right.$

$$\left. + ۲ لا ما فَ\left(\frac{ما}{لا}\right)\right\}$$

(۵) اگر $ی = ف(لا^2 + ما^2)$ تو ثابت کرو کہ $\frac{جف^2 ی}{جف لا^2} + \frac{جف^2 ی}{جف ما^2}$

$$= ۴ (لا^2 + ما^2) فَ َ(لا^2 + ما^2) + ۴ فَ(لا^2 + ما^2)$$

(۶) اگر $ع = ف(ر)$ جہاں $ر = \sqrt{لا^2 + ما^2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{جف^2 ع}{جف لا^2} + \frac{جف^2 ع}{جف ما^2} = فَ َ(ر) + \frac{1}{ر} فَ(ر)$$

(۷) اگر عامل $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما}^2}$ کے لئے علامت لف^2_1 استعمال کی جائے تو ثابت کرو کہ

$\text{لف}^2_1 \text{ لوک ر} = ۰$ جہاں $\text{ر} = \sqrt{(\text{لا} - \text{عما})^2 + (\text{ما} - \text{بما})^2}$

(۸) اگر $\text{ع} = \text{ف}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2)$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ی}^2}$

$= ۴(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2)\text{ف}''(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2) + ۶\text{ف}'(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2)$

(۹) اگر $\text{ع} = \text{ف}(\text{ر})$ جہاں $\text{ر} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ی}^2} = \text{ف}''(\text{ر}) + \frac{2}{\text{ر}}\text{ف}'(\text{ر})$

(۱۰) اگر لف^2 عامل $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ی}^2}$ کو ظاہر کرے تو ثابت کرو کہ

$\text{لف}^2 \text{ر} = \frac{2}{\text{ر}}$ اور $\text{لف}^2 \frac{1}{\text{ر}} = ۰$

جہاں $\text{ر} = \sqrt{(\text{لا} - \text{عما})^2 + (\text{ما} - \text{بما})^2 + (\text{ی} - \text{جما})^2}$

(۱۱) اگر لف^2 کے وہی معنی ہوں جو سوال (۱۰) میں ہیں اور اگر

$\text{لف}^2\text{ع} = ۰$، $\text{لف}^2\text{و} = ۰$، $\text{لف}^2\text{ھ} = ۰$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$

$+ \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ی}} = ۰$

تو $\text{لف}^2(\text{لا ع} + \text{ما و} + \text{ی ھ}) = ۰$

(۱۲) اگر ع، و متغیر لا، ما، ی کے دو ایسے تفاعل ہوں جو مساوات $\text{لف}^2\,\text{ع} = 0$ اور $\text{لف}^2\,\text{و} = 0$ کو پورا کریں اور و تفاعل ہو ع کا تو ثابت کرو کہ و کی شکل ا ع + ب ہوگی۔

(۱۳) اگر لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ جہاں ر اور طہ متغیر ت کے تفاعل ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}\,\text{جم طہ} + \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}\,\text{جب طہ} = \frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$

$$-\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}\,\text{جب طہ} + \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}\,\text{جم طہ} = \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)$$

(۱۴) اگر $\text{ع} = \frac{1}{\text{ر}}\,\text{فہ}(\text{ج ت} - \text{ر}) + \frac{1}{\text{ر}}\,\text{خہ}(\text{ج ت} + \text{ر})$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ت}^2} = \text{ج}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2} + \frac{2}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}}\right)$

(۱۵) اگر $\text{ع} = \text{ت}^{-\frac{1}{2}}\,\text{ھو}^{-\frac{\text{لا}^2}{4\text{ک ت}}}$ تو ثابت $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}$

(۱۶) اگر $\text{ع} = \text{ت}^{-\frac{3}{2}}\,\text{ھو}^{-\frac{\text{ر}^2}{4\text{ک ت}}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2} + \frac{2}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}}\right)$

(۱۷) $\text{ع} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فہ}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$ تو تصدیق کرو کہ $\text{لا}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{ن ع}$

اور $\text{لا}^2\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + 2\,\text{لا ما}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ما}^2\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \text{ن}(\text{ن}-1)\text{ع}$

(۱۸) اگر $\text{ما} - \text{ن ی} = \text{ف}(\text{لا} - \text{م ی})$ تو ثابت کرو $\text{م}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{ن}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = 1$

(۱۹) اگر ی - جہ = (لا - عہ) ف $\left(\frac{\text{ما - بہ}}{\text{لا - عہ}}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{لا - عہ})\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + (\text{ما - بہ})\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{ی - جہ}$$

(۲۰) اگر لا = ج جم ط جم عا ، ما = ج جب ط جب عا

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ط}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}$

$$= \frac{\text{ج}^2}{2}(\text{جم ۲ ط - جم ۲ عا})\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}\right)$$

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر منحنی فہ (لا ، ما) = ۰ کے کسی نقطہ پر ایک ساتھ $\text{فہ}_{\text{لا}} = 0$ ، $\text{فہ}_{\text{ما}} = 0$ ۔ تو منحنی کی دو شاخیں (حقیقی یا خیالی) اس نقطہ میں سے گزرتی ہیں اور ان شاخوں کی سمتیں ذیل کی دو درجی مساوات سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{فہ}_{\text{لالا}} + ۲\,\text{فہ}_{\text{لاما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{فہ}_{\text{ماما}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 = 0$$

پس ثابت کرو کہ نقطہ عقدہ یا قرن یا اکیلا نقطہ ہے بموجب اس کے کہ

$$(\text{فہ}_{\text{لاما}})^2 > \text{یا} = \text{یا} < \text{فہ}_{\text{لالا}}\,\text{فہ}_{\text{ماما}}$$

تمت

ضمیمہ

عددی جدول

۱:- طبیعی اعداد ۱۰ تا ۱۰۰ کے مربع

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱۰۰	۱۲۱	۱۴۴	۱۶۹	۱۹۶	۲۲۵	۲۵۶	۲۸۹	۳۲۴	۳۶۱
۲	۴۰۰	۴۴۱	۴۸۴	۵۲۹	۵۷۶	۶۲۵	۶۷۶	۷۲۹	۷۸۴	۸۴۱
۳	۹۰۰	۹۶۱	۱۰۲۴	۱۰۸۹	۱۱۵۶	۱۲۲۵	۱۲۹۶	۱۳۶۹	۱۴۴۴	۱۵۲۱
۴	۱۶۰۰	۱۶۸۱	۱۷۶۴	۱۸۴۹	۱۹۳۶	۲۰۲۵	۲۱۱۶	۲۲۰۹	۲۳۰۴	۲۴۰۱
۵	۲۵۰۰	۲۶۰۱	۲۷۰۴	۲۸۰۹	۲۹۱۶	۳۰۲۵	۳۱۳۶	۳۲۴۹	۳۳۶۴	۳۴۸۱
۶	۳۶۰۰	۳۷۲۱	۳۸۴۴	۳۹۶۹	۴۰۹۶	۴۲۲۵	۴۳۵۶	۴۴۸۹	۴۶۲۴	۴۷۶۱
۷	۴۹۰۰	۵۰۴۱	۵۱۸۴	۵۳۲۹	۵۴۷۶	۵۶۲۵	۵۷۷۶	۵۹۲۹	۶۰۸۴	۶۲۴۱
۸	۶۴۰۰	۶۵۶۱	۶۷۲۴	۶۸۸۹	۷۰۵۶	۷۲۲۵	۷۳۹۶	۷۵۶۹	۷۷۴۴	۷۹۲۱
۹	۸۱۰۰	۸۲۸۱	۸۴۶۴	۸۶۴۹	۸۸۳۶	۹۰۲۵	۹۲۱۶	۹۴۰۹	۹۶۰۴	۹۸۰۱

ب ۱:- ۰,۱ کے وقفوں پر صفر سے ۱۰ تک تمام اعداد کے جذر المربع

	,۰	,۱	,۲	,۳	,۴	,۵	,۶	,۷	,۸	,۹
۰	۰	۰,۳۱۶	۰,۴۴۷	۰,۵۴۸	۰,۶۳۲	۰,۷۰۷	۰,۷۷۵	۰,۸۳۷	۰,۸۹۴	۰,۹۴۹
۱	۱,۰۰۰	۱,۰۴۹	۱,۰۹۵	۱,۱۴۰	۱,۱۸۳	۱,۲۲۵	۱,۲۶۵	۱,۳۰۴	۱,۳۴۲	۱,۳۷۸
۲	۱,۴۱۴	۱,۴۴۹	۱,۴۸۳	۱,۵۱۷	۱,۵۴۹	۱,۵۸۱	۱,۶۱۲	۱,۶۴۳	۱,۶۷۳	۱,۷۰۳
۳	۱,۷۳۲	۱,۷۶۱	۱,۷۸۹	۱,۸۱۷	۱,۸۴۴	۱,۸۷۱	۱,۸۹۷	۱,۹۲۴	۱,۹۴۹	۱,۹۷۵
۴	۲,۰۰۰	۲,۰۲۵	۲,۰۴۹	۲,۰۷۴	۲,۰۹۸	۲,۱۲۱	۲,۱۴۵	۲,۱۶۸	۲,۱۹۱	۲,۲۱۴
۵	۲,۲۳۶	۲,۲۵۸	۲,۲۸۰	۲,۳۰۲	۲,۳۲۴	۲,۳۴۵	۲,۳۶۶	۲,۳۸۷	۲,۴۰۸	۲,۴۲۹
۶	۲,۴۴۹	۲,۴۷۰	۲,۴۹۰	۲,۵۱۰	۲,۵۳۰	۲,۵۵۰	۲,۵۶۹	۲,۵۸۸	۲,۶۰۸	۲,۶۲۷
۷	۲,۶۴۶	۲,۶۶۵	۲,۶۸۳	۲,۷۰۲	۲,۷۲۰	۲,۷۳۹	۲,۷۵۷	۲,۷۷۵	۲,۷۹۳	۲,۸۱۱
۸	۲,۸۲۸	۲,۸۴۶	۲,۸۶۴	۲,۸۸۱	۲,۸۹۸	۲,۹۱۵	۲,۹۳۳	۲,۹۵۰	۲,۹۶۶	۲,۹۸۳
۹	۳,۰۰۰	۳,۰۱۷	۳,۰۳۳	۳,۰۵۰	۳,۰۶۶	۳,۰۸۲	۳,۰۹۸	۳,۱۱۴	۳,۱۳۰	۳,۱۴۶
۱۰	۳,۱۶۲									

ج ۲: ایک کے وقفوں پر ۱۰ سے ۱۰۰ تک کے طبعی اعداد کے جذر المربع

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۳٫۱۶۲	۳٫۳۱۷	۳٫۴۶۴	۳٫۶۰۶	۳٫۷۴۲	۳٫۸۷۳	۴٫۰۰۰	۴٫۱۲۳	۴٫۲۴۳	۴٫۳۵۹
۲	۴٫۴۷۲	۴٫۵۸۳	۴٫۶۹۰	۴٫۷۹۶	۴٫۸۹۹	۵٫۰۰۰	۵٫۰۹۹	۵٫۱۹۶	۵٫۲۹۲	۵٫۳۸۵
۳	۵٫۴۷۷	۵٫۵۶۸	۵٫۶۵۷	۵٫۷۴۵	۵٫۸۳۱	۵٫۹۱۶	۶٫۰۰۰	۶٫۰۸۳	۶٫۱۶۴	۶٫۲۴۵
۴	۶٫۳۲۵	۶٫۴۰۳	۶٫۴۸۱	۶٫۵۵۷	۶٫۶۳۳	۶٫۷۰۸	۶٫۷۸۲	۶٫۸۵۶	۶٫۹۲۸	۷٫۰۰۰
۵	۷٫۰۷۱	۷٫۱۴۱	۷٫۲۱۱	۷٫۲۸۰	۷٫۳۴۸	۷٫۴۱۶	۷٫۴۸۳	۷٫۵۵۰	۷٫۶۱۶	۷٫۶۸۱
۶	۷٫۷۴۶	۷٫۸۱۰	۷٫۸۷۴	۷٫۹۳۷	۸٫۰۰۰	۸٫۰۶۲	۸٫۱۲۴	۸٫۱۸۵	۸٫۲۴۶	۸٫۳۰۷
۷	۸٫۳۶۷	۸٫۴۲۶	۸٫۴۸۵	۸٫۵۴۴	۸٫۶۰۲	۸٫۶۶۰	۸٫۷۱۸	۸٫۷۷۵	۸٫۸۳۲	۸٫۸۸۸
۸	۸٫۹۴۴	۹٫۰۰۰	۹٫۰۵۵	۹٫۱۱۰	۹٫۱۶۵	۹٫۲۲۰	۹٫۲۷۴	۹٫۳۲۷	۹٫۳۸۱	۹٫۴۳۴
۹	۹٫۴۸۷	۹٫۵۳۹	۹٫۵۹۲	۹٫۶۴۴	۹٫۶۹۵	۹٫۷۴۷	۹٫۷۹۸	۹٫۸۴۹	۹٫۸۹۹	۹٫۹۵۰

ج۔ ٫۱ کے وقفوں پر ۱ سے ۱۰ تک کے اعداد کے متکافیات

	٫۰	٫۱	٫۲	٫۳	٫۴	٫۵	٫۶	٫۷	٫۸	٫۹
۱	۱٫۰۰۰	٫۹۰۹	٫۸۳۳	٫۷۶۹	٫۷۱۴	٫۶۶۷	٫۶۲۵	٫۵۸۸	٫۵۵۶	٫۵۲۶
۲	٫۵۰۰	٫۴۷۶	٫۴۵۵	٫۴۳۵	٫۴۱۷	٫۴۰۰	٫۳۸۵	٫۳۷۰	٫۳۵۷	٫۳۴۵
۳	٫۳۳۳	٫۳۲۳	٫۳۱۳	٫۳۰۳	٫۲۹۴	٫۲۸۶	٫۲۷۸	٫۲۷۰	٫۲۶۳	٫۲۵۶
۴	٫۲۵۰	٫۲۴۴	٫۲۳۸	٫۲۳۳	٫۲۲۷	٫۲۲۲	٫۲۱۷	٫۲۱۳	٫۲۰۸	٫۲۰۴
۵	٫۲۰۰	٫۱۹۶	٫۱۹۲	٫۱۸۹	٫۱۸۵	٫۱۸۲	٫۱۷۹	٫۱۷۵	٫۱۷۲	٫۱۶۹
۶	٫۱۶۷	٫۱۶۴	٫۱۶۱	٫۱۵۹	٫۱۵۶	٫۱۵۴	٫۱۵۲	٫۱۴۹	٫۱۴۷	٫۱۴۵
۷	٫۱۴۳	٫۱۴۱	٫۱۳۹	٫۱۳۷	٫۱۳۵	٫۱۳۳	٫۱۳۲	٫۱۳۰	٫۱۲۸	٫۱۲۷
۸	٫۱۲۵	٫۱۲۳	٫۱۲۲	٫۱۲۰	٫۱۱۹	٫۱۱۸	٫۱۱۶	٫۱۱۵	٫۱۱۴	٫۱۱۲
۹	٫۱۱۱	٫۱۱۰	٫۱۰۹	٫۱۰۸	٫۱۰۶	٫۱۰۵	٫۱۰۴	٫۱۰۳	٫۱۰۲	٫۱۰۱

د:۔ ربع کے بیسویں حصہ کے ضعفوں پر تمام زاویوں کی مثلثی نسبتیں

$\frac{ط}{\frac{1}{2}\pi}$	جب ط	قم ط	مس ط	ظم ط	قط ط	جم ط	
؍۰	۰	∞	۰	∞	۱؍۰۰۰	۱؍۰۰۰	۱؍۰۰
؍۰۵	؍۰۷۸	۱۲؍۷۴۵	؍۰۷۹	۱۲؍۷۰۶	۱؍۰۰۳	؍۹۹۷	؍۹۵
؍۱۰	؍۱۵۶	۶؍۳۹۲	؍۱۵۸	۶؍۳۱۴	۱؍۰۱۲	؍۹۸۸	؍۹۰
؍۱۵	؍۲۳۳	۴؍۲۸۴	؍۲۴۰	۴؍۱۶۵	۱؍۰۲۸	؍۹۷۲	؍۸۵
؍۲۰	؍۳۰۹	۳؍۲۳۶	؍۳۲۵	۳؍۰۷۸	۱؍۰۵۱	؍۹۵۱	؍۸۰
؍۲۵	؍۳۸۳	۲؍۶۱۳	؍۴۱۴	۲؍۴۱۴	۱؍۰۸۲	؍۹۲۴	؍۷۵
؍۳۰	؍۴۵۴	۲؍۲۰۳	؍۵۱۰	۱؍۹۶۳	۱؍۱۲۲	؍۸۹۱	؍۷۰
؍۳۵	؍۵۲۲	۱؍۹۱۴	؍۶۱۳	۱؍۶۳۲	۱؍۱۷۳	؍۸۵۳	؍۶۵
؍۴۰	؍۵۸۸	۱؍۷۰۱	؍۷۲۷	۱؍۳۷۶	۱؍۲۳۶	؍۸۰۹	؍۶۰
؍۴۵	؍۶۴۹	۱؍۵۴۰	؍۸۵۴	۱؍۱۷۱	۱؍۳۱۵	؍۷۶۰	؍۵۵
؍۵۰	؍۷۰۷	۱؍۴۱۴	۱؍۰۰۰	۱؍۰۰۰	۱؍۴۱۴	؍۷۰۷	؍۵۰
	جم ط	قط ط	ظم ط	مس ط	قم ط	جب ط	$\frac{ط}{\frac{1}{2}\pi}$

ع:۔ ۱ء کے وقفوں پر صفر سے ۲ء۵ تک تمام اعداد کے قوت نما اور زائدی تفاعلوں کی قیمتیں

لا	قو لا	قو -لا	جمز لا	جیز لا	مسز لا
٠	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	٠	٠
٫۱	۱٫۱۰۵	٫۹۰۵	۱٫۰۰۵	٫۱۰۰	٫۱۰۰
٫۲	۱٫۲۲۱	٫۸۱۹	۱٫۰۲۰	٫۲۰۱	٫۱۹۷
٫۳	۱٫۳۵۰	٫۷۴۱	۱٫۰۴۵	٫۳۰۵	٫۲۹۱
٫۴	۱٫۴۹۲	٫۶۷۰	۱٫۰۸۱	٫۴۱۱	٫۳۸۰
٫۵	۱٫۶۴۹	٫۶۰۷	۱٫۱۲۸	٫۵۲۱	٫۴۶۲
٫۶	۱٫۸۲۲	٫۵۴۹	۱٫۱۸۵	٫۶۳۷	٫۵۳۷
٫۷	۲٫۰۱۴	٫۴۹۷	۱٫۲۵۵	٫۷۵۹	٫۶۰۴
٫۸	۲٫۲۲۶	٫۴۴۹	۱٫۳۳۷	٫۸۸۸	٫۶۶۴
٫۹	۲٫۴۶۰	٫۴۰۷	۱٫۴۳۳	۱٫۰۲۷	٫۷۱۶
۱٫۰	۲٫۷۱۸	٫۳۶۸	۱٫۵۴۳	۱٫۱۷۵	٫۷۶۲
۱٫۱	۳٫۰۰۴	٫۳۳۳	۱٫۶۶۹	۱٫۳۳۶	٫۸۰۱
۱٫۲	۳٫۳۲۰	٫۳۰۱	۱٫۸۱۱	۱٫۵۰۹	٫۸۳۴
۱٫۳	۳٫۶۶۹	٫۲۷۳	۱٫۹۷۱	۱٫۶۹۸	٫۸۶۲
۱٫۴	۴٫۰۵۵	٫۲۴۷	۲٫۱۵۱	۱٫۹۰۴	٫۸۸۵
۱٫۵	۴٫۴۸۲	٫۲۲۳	۲٫۳۵۲	۲٫۱۲۹	٫۹۰۵
۱٫۶	۴٫۹۵۳	٫۲۰۲	۲٫۵۷۷	۲٫۳۷۶	٫۹۲۲
۱٫۷	۵٫۴۷۴	٫۱۸۳	۲٫۸۲۸	۲٫۶۴۶	٫۹۳۵
۱٫۸	۶٫۰۵۰	٫۱۶۵	۳٫۱۰۷	۲٫۹۴۲	٫۹۴۷
۱٫۹	۶٫۶۸۶	٫۱۵۰	۳٫۴۱۸	۳٫۲۶۸	٫۹۵۶
۲٫۰	۷٫۳۸۹	٫۱۳۵	۳٫۷۶۲	۳٫۶۲۷	٫۹۶۴
۲٫۱	۸٫۱۶۶	٫۱۲۲	۴٫۱۴۴	۴٫۰۲۲	٫۹۷۰
۲٫۲	۹٫۰۲۵	٫۱۱۱	۴٫۵۶۸	۴٫۴۵۷	٫۹۷۶
۲٫۳	۹٫۹۷۴	٫۱۰۰	۵٫۰۳۷	۴٫۹۳۷	٫۹۸۰
۲٫۴	۱۱٫۰۲۳	٫۰۹۱	۵٫۵۵۷	۵٫۴۶۶	٫۹۸۴
۲٫۵	۱۲٫۱۸۲	٫۰۸۲	۶٫۱۳۲	۶٫۰۵۰	٫۹۸۷

ف:۔ لوکارتم بلحاظ اساس قو

	۰٫	۱٫	۲٫	۳٫	۴٫	۵٫	۶٫	۷٫	۸٫	۹٫
۱	۰	٫۰۹۵	٫۱۸۲	٫۲۶۲	٫۳۳۶	٫۴۰۵	٫۴۷۰	٫۵۳۱	٫۵۸۸	٫۶۴۲
۲	٫۶۹۳	٫۷۴۲	٫۷۸۸	٫۸۳۳	٫۸۷۵	٫۹۱۶	٫۹۵۶	٫۹۹۳	۱٫۰۳۰	۱٫۰۶۵
۳	۱٫۰۹۹	۱٫۱۳۱	۱٫۱۶۳	۱٫۱۹۴	۱٫۲۲۴	۱٫۲۵۳	۱٫۲۸۱	۱٫۳۰۸	۱٫۳۳۵	۱٫۳۶۱
۴	۱٫۳۸۶	۱٫۴۱۱	۱٫۴۳۵	۱٫۴۵۹	۱٫۴۸۲	۱٫۵۰۴	۱٫۵۲۶	۱٫۵۴۸	۱٫۵۶۹	۱٫۵۸۹
۵	۱٫۶۰۹	۱٫۶۲۹	۱٫۶۴۹	۱٫۶۶۸	۱٫۶۸۶	۱٫۷۰۵	۱٫۷۲۳	۱٫۷۴۰	۱٫۷۵۸	۱٫۷۷۵
۶	۱٫۷۹۲	۱٫۸۰۸	۱٫۸۲۵	۱٫۸۴۱	۱٫۸۵۶	۱٫۸۷۲	۱٫۸۸۷	۱٫۹۰۲	۱٫۹۱۷	۱٫۹۳۲
۷	۱٫۹۴۶	۱٫۹۶۰	۱٫۹۷۴	۱٫۹۸۸	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱۵	۲٫۰۲۸	۲٫۰۴۱	۲٫۰۵۴	۲٫۰۶۷
۸	۲٫۰۷۹	۲٫۰۹۲	۲٫۱۰۴	۲٫۱۱۶	۲٫۱۲۸	۲٫۱۴۰	۲٫۱۵۲	۲٫۱۶۳	۲٫۱۷۵	۲٫۱۸۶
۹	۲٫۱۹۷	۲٫۲۰۸	۲٫۲۱۹	۲٫۲۳۰	۲٫۲۴۱	۲٫۲۵۱	۲٫۲۶۲	۲٫۲۷۲	۲٫۲۸۲	۲٫۲۹۳

لوک ۱۰ = ۲٫۳۰۲، لوک $۱۰^{۲}$ = ۴٫۶۰۵، لوک $۱۰^{۳}$ = ۶٫۹۰۸

صغاری احصا

(حصہ سوم)

A

Amplitude	حیطہ، سعت
Approximation	تقرب
Asymptotes	متقارب

B

Binomial Theorem	مسئلہ ثنائی

C

Charge	بار
Circuit	دور
Commutative property	خاصیت مبادلہ
Complementary function	متمم تفاعل
Complete solution	مکمل یا پورا حل

D

Deflection	انصراف
Degree	درجہ
Differential equation	تفرقی مساوات
Differentiation	تفرق

English		اردو
Double limit		دوہری انتہا
Dynamics		حرکیات، علم حرکت
Electromotive force	E	قوت محرکہ برق
Envelope		لفاف
Epoch		آن
Equilibrium		توازن
Equipotential		ہم قوہ
Essentially convergent		لازماً مستدق
Evolute		برپیچہ
Exact equation		ٹھیک مساوات
Expansion		پھیلاؤ
Forced Oscillation	F	قسری اہتزاز
Harmonic	H	موسیقی
Homogeneous equation		متجانس مساوات
Induction	I	امالہ
Integrating factor		متکمل جزو ضربی
Integration		تکمل
Involute		درپیچہ
Maximum	M	اعظم
Minimum		اقل
Multiple		ضعفی
Normal mode	N	طبعی کیفیت
Operater (D)	O	عامل (عف)
Order		رتبہ
Orthogonal trajectories		قائم خطوط طاری

Partial	P	جزوی
Particular Integral		خاص تکملہ
Particular solution		خاص حل
Pendulum		رقاص
Period		دور
Phase		ہئیت
Point of inflexion		نقطہ عطف
Pontential		قوہ
Potential energy		توانائی بالقوہ
Power series		قوتی سلسلہ
Primitive		ابتدائی
Projection		ظل
Rectilinear motion	R	مستقیم حرکت
Repulsion		اندفاع
Resistance		مزاحمت
Self-induction	S	خود امالہ
Simultaneous		ہمزاد
Singular solution		نادر حل
Solid of revolution		گردشی مجسم
Stable		قائم
Subnormal		زیر عماد
Subtangent		زیر مماس
Suspension bridge		جھولا پل
Unstable	U	غیر قائم
Variables Separable	V	متغیر جدائی پذیر

اہتزاز	Vibration
لزوجت	Viscosity

اعداد صفحوں کے لحاظ سے

(٭)